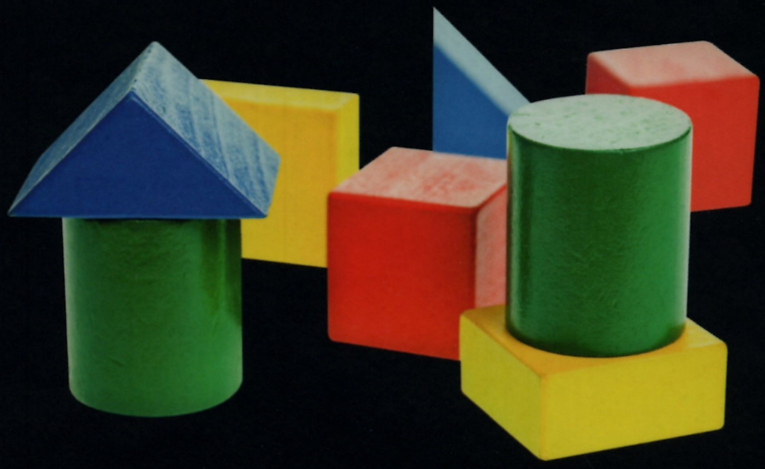
LA GEOMETRÍA

EUCLIDES

Las matemáticas presumen de figura



NATIONAL GEOGRAPHIC

EUCLIDES DE ALEJANDRÍA es uno de los autores de no ficción más vendidos de la historia. Su obra más importante, los *Elementos de geometría,* ha conocido más de un millar de ediciones y fue el libro formativo de incontables generaciones de científicos a lo largo de los siglos. Sus trece volúmenes compendian lo más granado de la geometría y la aritmética griegas. No menos influyente que los resultados fue el modo en que Euclides decidió exponerlos. Partiendo de unos pocos axiomas y definiciones el alejandrino procedió a deducir hasta 465 teoremas, construyendo así un edificio lógico inatacable hasta el descubrimiento, ya entrado el siglo XIX —¡más de dos milenios después!—, de las geometrías no euclidianas.

LA GEOMETRÍA

EUCLIDES

Las matemáticas presumen de figura

NATIONAL GEOGRAPHIC

A Joan Puig Vilanova
por su bondad, amistad,
camaradería y espíritu de familia.

In memoriam

JOSEP PLA I CARRERA. Profesor emérito de la Universitat de Barcelona, ha centrado su investigación en la lógica algebraica y, posteriormente, en la historia de la matemática. Ha escrito artículos y textos de divulgación de la matemática desde el punto de vista histórico y epistemológico.

Realización: EDITEC

Diseño cubierta: Llorenç Martí

Diseño interior: Luz de la Mora

Infografías: Joan Pejoan

Fotografías: Archivo RBA: 16, 23, 41, 57, 81, 103i, 105bi, 105bd, 111, 118; Museo del Prado, Madrid: 103d; Museo e Gallerie di Capodimonte, Nápoles: 105a; Sébastien Bertrand, París: 39.

ISBN: 978-84-473-7636-0
Depósito legal: B-6261-2016

Impreso y encuadernado en Rodesa, Villatuerta (Navarra)

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

Introducción

Cuando hablamos de Euclides, hablamos de geometría y también —aunque de forma muy diferente, como se verá— de aritmética griegas; en concreto, del fruto de la síntesis de tres siglos de racionalidad griega aplicada al pensamiento matemático.

El término *matemata* (μαθὴματα en su grafía original), de origen pitagórico, significa «lo que se puede aprender». La escuela pitagórica, activa desde el siglo V a.C., estableció como base del conocimiento científico cuatro «matemas» que les permitían explicar «el orden y la armonía del universo»: aritmética, geometría, música y astronomía. Según el destacado pitagórico Arquitas de Tarento, la «matemática sería la suma de esos cuatro matemas». (En la Edad Media constituyeron la base del cuadrivio que, junto con las tres artes del trivio —gramática, lógica y retórica—, formaban las «siete artes liberales», la parte central del currículum de las universidades.) En la Grecia clásica —siglos V al III a.C.— la palabra matemata no se puede disociar de la palabra filosofía (φιλοσοφία), «el amor por la sabiduría», cuyo uso se introduce para designar una cierta actitud ante el conocimiento.

Este libro se sirve de la figura de Euclides y muy particularmente de su gran obra maestra, los *Elementos de geometría*, como referente ideológico y metodológico para llevar a cabo un análisis de las aportaciones más relevantes del pensamiento matemático griego. Según el filósofo neoplatónico Proclo, una de las fuentes

más importantes de entre las que se dispone acerca de la obra de Euclides, dicho pensamiento arranca con el insigne filósofo y matemático Tales de Mileto, nacido en el año 624 a.C., uno de los siete sabios de Grecia y fundador de lo que a veces se designa como la escuela filosófica de Mileto. Este arranque coincidiría, según el mismo autor, con el del pensamiento filosófico de la Hélade en su conjunto.

El liderazgo de Tales pasaría a Pitágoras de Samos, nacido alrededor del año 570 a.C. y fundador de la escuela místico-filosófica que lleva su nombre. Con ella se da una profundización de la geometría y nace la aritmética entendida como arte deductiva. Se establecía así la distinción entre la *logística* o «arte práctico de los números» (en el que se incluiría la geometría entendida como arte de medir), y la *aritmética* o «teoría de los números». Las ideas filosóficas de la escuela pitagórica trascendieron e influyeron en la famosa Academia de Platón, activa desde el 387 a.C. En ella floreció un matemático extraordinario, Eudoxo de Cnido, cuya vinculación con la Academia —profesor, alumno, o visitante— es no obstante difícil de precisar. A él se deben dos conceptos fundamentales que luego recogería Euclides, la *teoría de la proporción* —necesaria para establecer los teoremas de Tales de líneas y superficies— y el *método de exhaución*, que constituye la base teórica necesaria para calcular áreas de figuras geométricas planas y volúmenes de sólidos.

A lo largo del siglo IV a.C. se consolidaron nuevas herramientas lógicas como las debidas a los filósofos estoicos y a Aristóteles, las cuales constituyen la armazón del texto euclídeo. Aristóteles, en particular, impuso limitaciones al concepto de infinito, una noción de fundamental importancia tanto en la aritmética de raíz pitagórica como en la geometría de Euclides y muy especialmente en el crucial postulado de las paralelas.

Los *Elementos* de Euclides son herencia y síntesis definitiva de estos antecedentes. En el desarrollo de la matemática griega —fundamentalmente en geometría— hay un antes y un después de esta magna obra. Otros tratados de carácter fundamental —esto es, de índole teórica—, sean de geometría, de astronomía o de aritmética —piénsese en la *Sintaxis* de Claudio Ptolomeo,

en la *Aritmética* de Diofanto, en la *Sintaxis matemática* de Papo de Alejandría— son herederos de su estilo deductivo. Pero su impacto va mucho más allá. El historiador Carl B. Boyer calificó los *Elementos* como el libro de referencia más influyente de la historia, y estimó que solo la Biblia lo superaba en número de ediciones (cerca de 1 000). Descartes y Newton aprendieron en sus páginas, y obras como los *Principios de filosofía o los Principia mathematica*, escritas casi dos milenios después que los *Elementos*, son estructuralmente reminiscentes de esta última. Es, con toda seguridad, el texto matemático más relevante jamás escrito.

Toda aproximación biográfica a la figura de Euclides debe conllevar pues el análisis de los *Elementos*, y a través suyo, de los tres siglos de pensamiento y de epistemología de la matemática griegos que en ellos se recogen. La primera y más importante influencia de la obra procede de las escuelas platónica y aristotélica, de cuyo pensamiento matemático los *Elementos* puede considerarse la síntesis. Aunque hay autores que ven en los *Elementos* una mayor influencia del primero, su estructura es, como se verá, fundamentalmente aristotélica, sin que por ello quepa ignorar la influencia de la Academia en cuanto a las aportaciones geométricas concretas ya sean de Teeteto, de Teodoro o de Eudoxo, o en la construcción de los sólidos platónicos que cierra la obra. Así, se analizará el porqué de algunos de los postulados más relevantes —algunos explícitos en el texto, otros implícitos— y de su necesidad epistemológica y metodológica para el desarrollo del texto euclídeo. También se verá cómo influye la limitación —o si se prefiere la restricción— impuesta por Aristóteles al concepto de infinito y cuáles son las consecuencias que dicha limitación produjo en el desarrollo de las matemáticas posteriores a los *Elementos*. Otro tema central que se abordará es la cuestión de la existencia de los objetos geométricos, tanto en su aspecto puramente filosófico como en el metodológico. Asimismo, presentaremos en detalle la cuestión de la «cuadratura del círculo», uno de los problemas más relevantes de entre los heredados de la geometría helena, lo que dará pie para hablar del gran Arquímedes y, de pasada, de otras notables figuras de la ciencia antigua —Apolonio, Ptolomeo, Diofanto, Papo y Proclo—, sin las cuales no se puede

tener una idea cabal de la «matemática griega» en su conjunto. Finalmente, abordaremos las aportaciones aritméticas —de raíz pitagórica— que Euclides ofrece en los Libros VII, VIII y IX.

El cuadro adjunto contiene los símbolos que se usan en el texto para referirse a los *segmentos rectilíneos*; a los *ángulos*; a los *triángulos*; a las *figuras rectilíneas cerradas* de tres, cuatro o más lados —triángulos, cuadrados, rectángulos, paralelogramos—; a la *circunferencia* (la curva formada por los puntos del plano que equidistan de uno dado *O*, el centro) y al *círculo* (la superficie encerrada por la circunferencia).

Símbolos usados en el texto y su significado	
AB	Segmento rectilíneo de extremos *A* y *B*.
< *ABC*	Ángulo de lados *AB* y *BC* y vértice en el punto *B*.
△*ABC*	Triángulo de vértices *A*, *B* y *C*.
□*AC*	Cuadrado de vértices opuestos *A* y *C*.
▭*AC*	Rectángulo de vértices opuestos *A* y *C*.
▱*AC*	Paralelogramo de vértices opuestos *A* y *C*.
ABCD···*M*	Figura poligonal cerrada rectilínea de vértices *A*, *B*, *C*, *D*,...,*M*.
○OA	Círculo o circunferencia de centro *O* y radio *OA*.

585 a.C. Tales de Mileto: geometría deductiva.

540 a.C. Pitágoras de Samos: aritmética pitagórica y geometría.

450 a.C. Parménides y la esfericidad de la Tierra.

430 a.C. Muerte de Zenón. Obras de Demócrito. Astronomía de Filolao. *Elementos* de Hipócrates de Quíos.

428 a.C. Nace Arquitas; muere Anaxágoras.

427 a.C. Nace Platón.

420 a.C. Trisectriz de Hipias. Aparecen los inconmensurables.

360 a.C. Eudoxo: la teoría de la proporción y el método de exhaución.

350 a.C. Menecmo y las secciones cónicas. La cuadratriz de Dinostrato.

335 a.C. Eudemo: *Historia de la geometría.*

ca. 325 a.C. Nacimiento de Euclides.

320 a.C. Las cónicas de Aristeo.

300 a.C. *Elementos* de Euclides.

ca. 265 a.C. Muerte de Euclides.

260 a.C. Astronomía heliocéntrica de Aristarco de Samos.

ca. 250 a.C. Obras de Arquímedes.

230 a.C. La criba de Eratóstenes.

225 a.C. *Cónicas* de Apolonio.

212 a.C. Muerte de Arquímedes.

180 a.C. La cisoide de Diocles. La concoide de Nicomedes. Hipsicles y la división del círculo en 360°.

140 a.C. La trigonometría de Hiparco.

60 a.C. Gémino y el postulado de las paralelas.

75 Obras de Herón de Alejandría.

100 *Aritmética* de Nicómaco de Gerasa. *Esférica* de Menelao.

125 Teón de Esmirna y la aritmética.

150 *Almagesto* de Ptolomeo.

250 *Aritmética* de Diofanto.

320 *Colección matemática* de Papo.

415 Muerte de Hipatia y cierre de la Biblioteca-Museo de Alejandría. Fin del conocimiento pagano griego.

485 Muerte de Proclo.

520 Antemio de Tralles e Isidoro de Mileto.

CAPÍTULO 1

Euclides de Alejandría

De la vida de Euclides se desconocen casi todos los detalles. Se sabe que escogió establecerse en Alejandría, por aquel entonces uno de los centros intelectuales del mundo griego, y que fundó allí una importante escuela de matemáticas. Las obras insignes de los grandes eruditos de la humanidad son la síntesis de sus predecesores y de su aportación personal, fruto de la reflexión y de su genio creador. Así ocurre con Euclides.

Casi no se tiene noticia alguna de la vida de Euclides, y las disponibles proceden todas del filósofo neoplatónico griego Proclo, que las escribió seis siglos después de la muerte de aquel. Proclo cuenta que Euclides estuvo activo en Alejandría, ciudad fundada por Alejandro Magno (356-323 a.C.) en el año 322 a.C. y que bajo el reinado de Ptolomeo I, «Sóter», «el Salvador», rey de Egipto, fue escogida capital de dicho reino. En ella Ptolomeo fundó la famosa Biblioteca, ampliada con el Museo por su hijo Ptolomeo II Filadelfo. El autor afirma que Euclides estudió en la Academia de Platón y que conocía la obra de Aristóteles. Tras el traslado a Alejandría, fundó una escuela y una tradición matemática que se recoge, entre otros textos, en los *Elementos*, sin duda una obra de madurez.

A Euclides se le atribuyen dos famosas anécdotas. A la pregunta del rey Ptolomeo I «¿No hay un camino más corto que el que propones en los *Elementos* para aprender geometría?», Euclides respondió tajante: «No hay ningún camino real para la geometría». La segunda se refiere a la actitud que adoptó cuando un alumno le preguntó qué beneficio le reportaba el estudio de la geometría. Llamó a un esclavo y le dijo: «Dale tres óbolos. Así obtendrá beneficio de lo que aprende».

Este gran desconocido consolidó en *Elementos* una tradición griega iniciada tres siglos atrás y que perduraría hasta el siglo VI,

PROCLO DE LICIA



El filósofo griego Proclo (410-485) fue una importante figura del neoplatonismo. Nacido en Bizancio, se le conoce como Proclo de Licia porque sus padres, oriundos de Xhantos, lo llevaron a esta provincia del sudoeste de Asia Menor a formarse a muy temprana edad. Pasada la infancia, marchó a Atenas para estudiar elocuencia con Leonas de Isauria y cuando este hubo de emigrar a Bizancio le llevó consigo. Tras visitar los centros docentes de Bizancio, Proclo volvió a Atenas, donde estudió con Plutarco de Atenas —no confundirlo con el autor de las *Vidas paralelas*— y con el filósofo neoplatónico Siriano de Alejandría, a quien sucedió en la dirección de la Academia, mereciendo por ello el nombre de «Diádoco», esto es, «sucesor de Platón», ocupando el puesto de director durante cuarenta años. Aunque vivió en la época de decadencia del helenismo, su obra ha resultado muy importante para un mejor conocimiento de Euclides y sus *Elementos*. De su inmenso legado se han conservado varios libros que se refieren a la «teología platónica», ya que por aquel entonces la obra de Platón se consideraba divina, mientras que las doctrinas de Aristóteles se estudiaban como una introducción a ella.

nueve siglos después de su muerte, acaecida hacia el 265 a.C. Es, pues, el gran sintetizador de tres siglos de matemática griega que, por la solidez de la síntesis euclídea, debió ser muy notable, máxime si tenemos en cuenta que los *Elementos* excluyen muchos temas a pesar de ser objeto de estudio en la Academia.

Los apuntes biográficos de Proclo se encuentran en sus *Comentarios del Libro I de los Elementos de Euclides*, un texto de gran importancia para el estudioso porque proporciona una valiosa información histórica, epistemológica y metodológica de Euclides y de los geómetras que le precedieron. Sobre Euclides escribe:

No mucho más joven que (Hermótimo y Filipo) en la composición de sus *Elementos*, Euclides coordinó muchos trabajos de Eudoxo, perfeccionó los de Teeteto y demostró irrefutablemente lo que sus predecesores habían presentado de una manera difusa.

Vivió bajo el reinado de Ptolomeo I porque Arquímedes, posterior a éste, lo menciona. [...] Euclides es, por lo tanto, posterior a los discípulos de Platón y anterior a Arquímedes y Eratóstenes, [...] —y era partidario de la filosofía de Platón, por lo cual expuso como resultado de su *Enseñanza de los elementos* la construcción de los sólidos platónicos.

Proclo no hace ninguna referencia al lugar de nacimiento de Euclides, lo que hace suponer que lo desconocía, pero le atribuye la anécdota del camino real en el aprendizaje de la geometría expuesto anteriormente.

La mejor síntesis de la biografía de Euclides acaso es la que ofrece el novelista británico Edward M. Foster en su guía de Alejandría:

No sabemos nada de él; a decir verdad, hoy lo consideramos más como una rama del saber que como un hombre.

OBRAS DE EUCLIDES DISTINTAS DE LOS «ELEMENTOS»

Además de los *Elementos*, sabemos que Euclides escribió otras obras. En el prólogo a la parte segunda de los ya mencionados *Comentarios*, Proclo le atribuye las siguientes:

De este hombre hay otras muchas obras matemáticas de asombrosa exactitud y sabia especulación, tales como su *Óptica*, su *Catóptrica* y sus *Elementos de música*, además de un libro *Sobre divisiones*; pero la admirable en el más alto grado es la *Enseñanza de los elementos de la geometría* por el orden y selección de los teoremas y de los problemas considerados como elementos, porque no incluyó

todos los que podía recoger, sino solo los susceptibles de informar sobre los primeros principios geométricos, siendo también de admirar sus variados modos de razonar, lo mismo cuando parte de las causas que de las pruebas siempre incontestables, exactas y adecuadas a la Ciencia, así como sus métodos dialécticos, a saber: el que distingue las especies en los descubrimientos, el que define en los conceptos esenciales, el demostrativo en el tránsito de los principios a las cosas que busca y el analítico de regresión de las cosas buscadas a los principios.

«Los hombres pasan, pero su obra permanece.»

— Últimas palabras del matemático Augustin Louis Cauchy al arzobispo de París antes de morir.

Si a esta información le añadimos la que proporciona Papo de Alejandría (290-350) en el Libro II de la *Colección matemática*, tenemos las obras que figuran en la tabla de la página siguiente. Algunas de ellas, si bien se atribuyen a Euclides y se suelen recoger en su *Obra completa*, fueron escritas con posterioridad por otros autores.

En conjunto, todas estas obras ponen de manifiesto un plan matemático docente bastante preciso con un amplio abanico de intereses: geométricos (las tres primeras obras son de corte elemental y las tres últimas son más difíciles) y no geométricos (obras de astronomía, música, óptica y mecánica). A continuación se ofrece un resumen de cada una de ellas con un mayor énfasis en las geométricas y, puesto que, obviamente, se desconoce su cronología, los hemos clasificado alfabéticamente en cada orden.

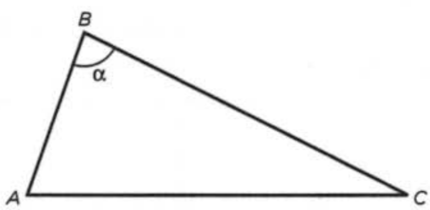
Los *Datos* contienen noventa y cuatro proposiciones que revisan qué propiedades de las figuras pueden deducirse cuando «se dan otras». Euclides observó que los datos pueden ser en magnitud (cuando se atiende a su medida), en especie (cuando se atiende al tipo de objeto geométrico) y en posición (cuando se atiende a su posición relativa), o mezcla de ellos. En realidad, se trata de un manual de aprendizaje que cubre la geometría plana elemental.

Obras atribuidas a Euclides			
MATEMÁTICA	*Elementos (de geometría)*: trece libros (I-XIII, de Euclides) y dos libros apócrifos (XIV, de Hipsicles, y XV, de Isidoro de Mileto)		
	GEOMETRÍA	Elementales	*Datos*
			División de las figuras
			Falsos razonamientos o *Falacias*
		Superiores	*Lugares de superficies*
			Porismas
			Secciones cónicas
	ASTRONOMÍA	*Fenómenos*	
	MÚSICA	*Elementos de música*	*Introducción a la armonía* (de Cleónidas)
			Sección del canon
FÍSICA	MECÁNICA	*Sobre lo ligero y lo pesado*	
		Sobre la palanca	
	ÓPTICA	*Óptica*	
		Catóptrica (de Teón de Alejandría)	

LA PROPOSICIÓN 45 DE LOS «DATOS» DE EUCLIDES

Un ejemplo del tipo de cuestiones tratadas en los *Datos* es el siguiente, en que los datos se dan en magnitud y se obtiene un dato en especie. La proposición 45 establece:

> *Se dan un ángulo < ABC [que en la figura corresponde a α] de un cierto triángulo y la razón que la suma de los lados AB, BC que forman el ángulo dado mantiene con el tercer lado AC. Entonces el triángulo está dado en especie (queda determinado).*

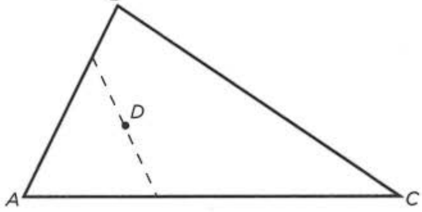


En las proposiciones 84 y 85 de este tratado se resuelven las ecuaciones de segundo grado $ax \pm x^2 = b^2$ tal como lo hacían los matemáticos mesopotámicos —lo veremos en el capítulo 4— cuando resolvían el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y \pm x = a, \\ xy = b^2. \end{cases}$$

El contenido de la recopilación *División de las figuras* se refiere a la división de una figura dada por una o varias rectas «sometidas a ciertas condiciones» de manera que las superficies de los trozos se hallen en una razón dada. Así, por ejemplo, se piden divisiones como:

Problema 20. *Separar un tercio de un triángulo $\triangle ABC$ por medio de una recta que pase por un punto dado D de su interior.*



Son problemas de geometría más en la tradición de los matemáticos babilónicos —con una aplicación más numérica— que de los *Elementos*. Los textos de este opúsculo que se conocen son de una versión latina de 1563, y de una versión árabe descubierta en París en 1851. De las treinta y seis proposiciones que contiene la obra, las únicas cuatro que se demuestran remiten a proposiciones de los *Elementos*.

Los *Falsos razonamientos* —o *Falacias*— también se han perdido. Tenemos la referencia de Proclo, que dice:

Enumera separadamente y ordena las diversas clases de errores, ejercitando sobre cada una de ellas nuestra inteligencia mediante

variados teoremas, oponiendo lo verdadero a lo falso y refutando el error con la demostración de la verdad. La obra tiene por objeto la purificación y el ejercicio de la inteligencia, mientras que los *Elementos* es una línea segura de explicación incontestable de las cosas geométricas.

LAS CÓNICAS

Las cónicas se obtienen cuando la superficie de un cono (doble) se corta con un plano y el tipo de cónica obtenido depende de la inclinación del plano. Como muestra la figura 1, si este es paralelo al eje del cono se obtiene la *hipérbola* (que tiene dos ramas), si es paralelo a la arista, la *parábola* y, si no cumple ninguna de estas dos condiciones se obtiene la *elipse* (que incluye la circunferencia). En la figura 2 se ilustran las distintas cónicas según la caracterización foco-directriz.

FIG. 1

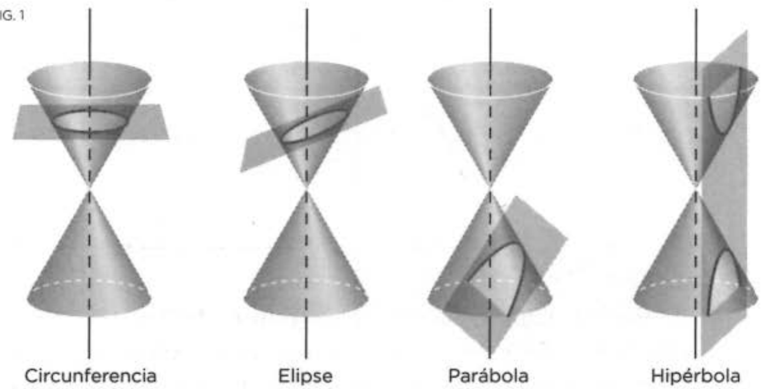
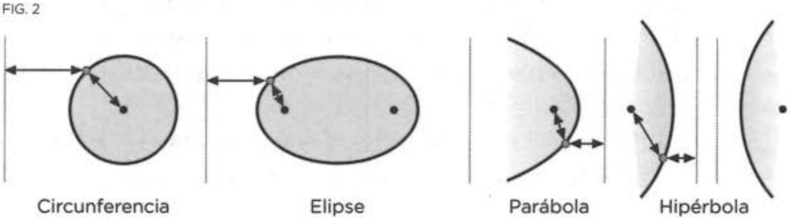


FIG. 2



Por lo tanto, es un texto propiamente docente del cual debemos lamentar su pérdida, ya que nos habría dado pistas de hasta qué punto consideraba Euclides que los errores eran de cariz geométrico o de cariz lógico. Otro de los textos perdidos de Euclides —citado por Papo— es *Lugares de superficies*. Se trata de textos de geometría superior cuyo contenido va más allá del de los *Elementos*. Según Papo, trata de «lugares —es decir, de la posición— de una línea o de una superficie cuyos puntos se hallan sometidos a una propiedad» y de «cómo se construyen tales lugares» que son líneas, como por ejemplo, la *cuadratriz*, la *espiral* sobre un cilindro, etc., o superficies como cilindros, conos, esferas o como las que se obtienen de la rotación de una cónica (elipses, hipérbolas o parábolas). El texto ofrece una *caracterización foco-directriz* de las cónicas que evita recurrir al espacio tridimensional:

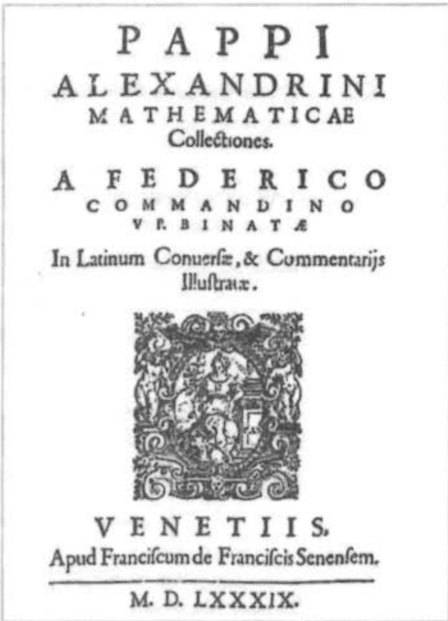
> El lugar de los puntos cuya relación entre la distancia a un punto [foco] y a una recta [directriz] dados se mantiene constante es una cónica: una elipse, una parábola o una hipérbola según que la razón dada sea menor, igual o mayor que uno.

De los *Porismas* —un texto de una enorme complejidad si se atiende a su contenido: 171 proposiciones, 38 lemas y 29 clases de porismas— los especialistas han dicho: «Su desaparición es lamentable». El propio término *porisma* es polisémico y, por consiguiente, ambiguo. En este texto se refiere a la obtención de objetos geométricos indeterminados; es decir, que no están bien definidos porque no se dan «todas» las características necesarias. Un porisma es, pues, un híbrido entre un problema y un teorema: hay que establecer su existencia pero no es posible mostrarlo habida cuenta de su indeterminación. En los *Elementos*, el término porisma se usa con la acepción de *corolario*, esto es, una consecuencia inmediata de un teorema ya demostrado.

De las *Secciones cónicas*, Francisco Vera, traductor al castellano de los *Elementos*, escribe:

> [...] sobre su contenido solo podemos hacer conjeturas. La crítica moderna cree que se trata de un arreglo de otra obra de Aristeo sobre





PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
Collectiones.

A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATÆ

In Latinum Conuersæ, & Commentarijs
Illustratæ.

VENETIIS.
Apud Franciscum de Franciscis Senensem.

M. D. LXXXIX.



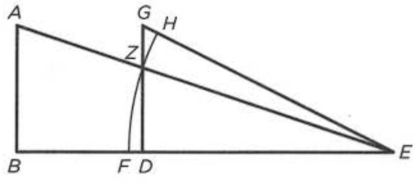
FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
Este retrato del pintor flamenco Justus van Gent lleva por título *Euclides de Megara* (1474), cuando en realidad está representado Euclides de Alejandría.

FOTO SUPERIOR DERECHA:
Portada de la edición de 1589 de la *Colección matemática* de Papo de Alejandría.

FOTO INFERIOR:
Estampilla de Sierra Leona con un detalle de *La escuela de Atenas*, de Rafael, en la que Euclides aparece usando el compás.

CUESTIÓN 8 DE LA «ÓPTICA» DE EUCLIDES

La *Óptica* sigue la misma estructura deductiva que los *Elementos*. En la octava proposición del libro, Euclides ofrece una prueba geométrica de que las medidas aparentes de dos objetos iguales y paralelos no son proporcionales a su distancia al ojo. Partamos de dos rectas iguales *AB*, *GD*, pero colocadas a distinta distancia del ojo *E*. Consideremos los rayos *AE*, *EG* y, con centro en *E* y radio *EZ* tiramos un arco de circunferencia *HZF*. Se observa que los triángulos $\triangle EZG$, $\triangle EZD$ son, respectivamente, mayor y menor que los sectores circulares *EZH*, *EZF*.



La razón

$$\frac{\triangle EZG}{\text{sector }(EZH)} > \frac{\triangle EZD}{\text{sector }(EZF)}.$$

Permutando tenemos

$$\frac{\triangle EZG}{\triangle EZD} > \frac{\text{sector }(EZH)}{\text{sector }(EZF)}$$

y componiendo obtenemos

$$\frac{\triangle EDG}{\triangle EZD} = \frac{\triangle EGZ}{\triangle EZD} + 1 > \frac{\text{sector }(EHF)}{\text{sector }(EZF)} = \frac{\text{sector }(EZH)}{\text{sector }(EZF)} + 1.$$

Pero $\frac{\triangle EDG}{\triangle EZD} = \frac{GD}{DZ} = \frac{AB}{DZ}$, ya que $GD=AB$.

Puesto que $\frac{AB}{DZ} = \frac{BE}{ED}$, finalmente resulta que

$$\frac{BE}{ED} > \frac{\text{sector }(EHF)}{\text{sector }(EZF)}.$$

Un sector de una circunferencia es al otro sector de la misma circunferencia como los ángulos correspondientes. Es decir:

$$\frac{BE}{ED} > \frac{< HEF}{< ZEF}.$$

el mismo tema y que sirvió de base al tratado de Apolonio. Arquímedes habla en varias ocasiones de ciertas propiedades de las secciones cónicas que creía contenidas en el tratado de Euclides.

Es otra de las obras perdidas, y posiblemente consistía en una «puesta en escena» de todo lo que, en su época, se conocía sobre las cónicas, con un objetivo pedagógico.

En la introducción se ha indicado que los «matemata» pitagóricos eran cuatro. Si Euclides pretendía articular una formación completa de la matemática, debía atender a los cuatro. No debe pues sorprender que se le atribuyan los textos que siguen.

> «Las leyes de la naturaleza no son más que los pensamientos matemáticos de Dios.»
>
> — Euclides.

Los *Fenómenos* constituyen un texto de pequeña astronomía; es decir, describe lo que es visible en la esfera celeste en movimiento, excluyendo los movimientos de los planetas. Se refiere, pues, al orto y al ocaso de las estrellas y presupone un cierto conocimiento de la geometría de la esfera que no se halla en los *Elementos*. El breve tratado *Elementos de música*, de autoría controvertida, contiene la teoría de los intervalos musicales de acuerdo con la tradición pitagórica.

La *Óptica* es un texto sobre la perspectiva que, junto con los *Fenómenos*, aborda el conocimiento de lo que vemos. Su objetivo es establecer la medida de lo visible en relación con la posición del observador y con la medida del objeto observado. Euclides sostiene que la visión va del ojo al objeto, una afirmación que se tendría por cierta hasta que el erudito árabe Alhazen (965-1040) en su *Kitab al-Manazir (Libro de Óptica)* afirmó precisamente lo contrario: la visión se debe a que el ojo recibe uno o más rayos de luz emitidos por el objeto. A pesar de ello, el libro de Euclides se considera uno de los trabajos sobre óptica más importantes de entre los anteriores a Newton, y artistas del Renacimiento como Filippo Brunelleschi, Leon Battista Alberti y Friedrich Dürer se sirvieron de él para elaborar sus propios tratados de perspectiva.

La paternidad de la *Catóptrica* es muy discutible. No obstante, hay que poner de relieve que en ella se da una demostración geométrica muy rigurosa de la ley de la reflexión de la luz. Esta ley establece que los rayos de luz se reflejan según ángulos iguales sobre la horizontal (o sobre la vertical). Tomando la figura 1 como guía, diríamos que el ángulo de incidencia θ es igual al ángulo de reflexión ζ. Para ello, Euclides se apoya en una proposición geométrica que dice, en la versión incluida en el Libro I de los *Elementos*:

FIG. 1

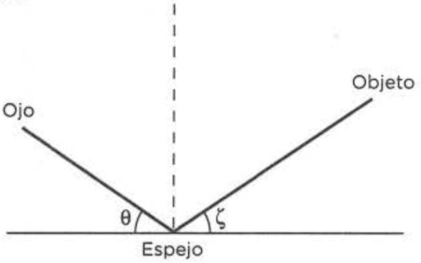
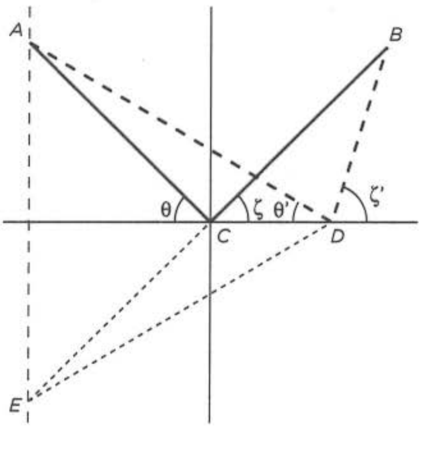


FIG. 2



Proposición 20. *Dos lados de un triángulo juntos son mayores que el tercer lado.*

La demostración es como sigue: Si el rayo visual incide según ángulos iguales, tendremos los rayos *AC* y *CB*; en cambio, si incide según ángulos diferentes, tendremos los rayos *AD*, *DB*. Por simetría respecto del plano horizontal trazamos la recta *CE*, simétrica del rayo *AC*, y la recta DE, simétrica del rayo *AD*. Se obtiene así el triángulo $\triangle BED$, cuyo lado *BE* es más corto que los dos lados *BD*, *DE* juntos. Por la proposición 20 que se ha citado anteriormente, el recorrido *AC*, *CB* es más corto que el recorrido *AD*, *DB* (figura 2).

Una vez demostrado que un rayo que obedezca la ley de la refracción recorre la menor distancia posible entre los puntos *A*, *C* y *B*, Euclides recurre a una hipótesis notable: la naturaleza impone que el camino seguido por el rayo

sea precisamente ese, el mínimo. Es el denominado *principio del camino mínimo*, y con esta elegante demostración Euclides inauguró una idea de extraordinaria importancia: las leyes de la naturaleza proceden según *mínimos*; es decir, algún ente físico implicado en el problema —el recorrido, el tiempo empleado, la energía utilizada, etc.— debe ser lo más pequeño posible. Muchos siglos más tarde, Pierre de Fermat (1601-1665) retomaría esa idea para establecer la ley de la refracción, que establece qué le sucede a un rayo de luz cuando cambia de elemento; por ejemplo, del aire al agua. En su caso, Fermat impuso que «sea mínimo el tiempo requerido para hacer el recorrido». Esta idea del genial matemático francés fue avalada por Gottfried Leibniz (1646-1716), quien la usaría para poner de manifiesto la utilidad del cálculo diferencial, una de cuyas aplicaciones es, precisamente, la determinación de máximos y mínimos. El principio general para determinar mínimos llevaría al suizo Leonhard Euler (1707-1783) a crear una rama nueva de la matemática: el *cálculo de variaciones*. Sería, sin embargo, Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) quien formularía de forma explícita el «postulado» según el cual la naturaleza se rige por el *principio de mínima acción*.

Finalmente, en el ámbito de la mecánica se le atribuyen a Euclides dos textos, de autoría muy discutible, citados ambos por algunos de los traductores árabes de la obra euclídea. *Sobre lo ligero y lo pesado* alberga la exposición más precisa que nos haya llegado de la dinámica aristotélica de los cuerpos que se mueven libremente; *Sobre la palanca*, por el contrario, contiene una teoría de la balanza que es independiente de la mecánica aristotélica.

LA GEOGRAFÍA DE LA MATEMÁTICA GRIEGA

Los autores cuyas aportaciones recoge y amplía Euclides, unidas a los principales comentaristas de la obra, dibujan una constelación de matemáticos y filósofos-matemáticos repartidos a lo ancho de Grecia y sus colonias, fundamentalmente las jónicas, así

como de Egipto y otras partes de África y de Asia. La cartografía del pensamiento matemático griego muestra un mapa que se extiende desde la isla de Sicilia, al oeste, hasta el Próximo Oriente, pasando por Italia, Libia o Turquía, y tiene su centro en Grecia propiamente dicha: el Peloponeso, el Ática, Tesalia, Macedonia y las islas del mar Egeo. La mayor densidad de autores se da en la parte más oriental de la Hélade.

Aquello que une a todos estos pensadores —lo que permite hablar de matemáticos y filósofos griegos— es el hecho de compartir, de palabra y escritura, una lengua común: los dialectos griegos arcaico-chipriota, dórico, eólico o jónico según la zona geográfica de procedencia. A finales del siglo III a.C. emergió una forma modificada del griego jónico-ático, el «habla común» o koiné, ampliamente utilizada en el mundo helenístico que dejó tras de sí la expansión macedónica liderada por Alejandro Magno. Esta variedad del griego se ha llamado en algunas ocasiones griego helenístico y constituye la base del griego moderno. No sería, pues, de extrañar que Euclides escribiera los *Elementos* en esa lengua.

Lugares de nacimiento de los matemáticos y filósofos griegos



Territorio	Ciudad	Nombre	Siglo
Sicilia	1. Siracusa	Arquímedes	287-212 a.C.
Italia	2. Roma	Boecio	480-524
	3. Elea	Parménides	570-475 a.C.
		Zenón	490-430 a.C.
	4. Crotona	Filolao	ca. 485-385 a.C.
		Arsiteo, el Viejo	370-300 a.C.
	5. Tarento	Brisón	ca. 450-390 a.C.
		Arquitas	400-347 a.C.
	6. Metaponte	Hipaso	siglo v a.C.
Libia	7. Cirene	Teodoro	427-347 a.C.
		Eratóstenes	276-194 a.C.
Peloponeso	8. Elis	Hipias	465-ca. 396 a.C.
	9. Atenas	Antifón	480-411 a.C.
		Sócrates	470-399 a.C.
		Platón	427-347 a.C.
		Teeteto	417-369 a.C.
		Plutarco	siglo v
	10. Queronea	Plutarco	ca. 46-120
Macedonia	11. Mende	Filipo	siglos iv-iii a.C.
	12. Estagira	Aristóteles	384-322 a.C.
	13. Abdera	Demócrito	460-370 a.C.
Turquía	14. Bizancio	Proclo	410-485
	15. Cícico	Menecmo	380-320 a.C.
	16. Cilicia	Simplicio	490-560
	17. Pitane	Autólico	360-290 a.C.
	18. Colofón	Hermótimo	siglo iv a.C.
	19. Clazomenes	Anaxágoras	500-428 a.C.
	20. Tralles	Antemio	474-558
	21. Éfeso	Heráclito	535-484 a.C.
	22. Mileto	Tales	ca. 624-ca. 547 a.C.
		Anaximandro	610-546 a.C.
	23. Perga	Apolonio	262-190 a.C.

Territorio	Ciudad	Nombre	Siglo
	24. Isauria	Leonas	siglo v
Islas griegas	25. Tasos	Leodamas	IV a.C.
	26. Quíos	Oenopide	500-420 a.C.
		Hipócrates	ca. 470-410 a.C.
	27. Samos	Pitágoras	ca. 569-ca. 475 a.C.
		Meliso	siglo v a.C.
		Conón	siglo III a.C.
	28. Rodas	Eudemo	370-300 a.C.
	29. Cnido	Eudoxo	400-350 a.C.
Egipto	30. Alejandría	Hipsicles	240-170 a.C.
		Herón	ca. 10-70
		Ptolomeo	100-170
		Diofanto	ca. 200-ca. 284
		Papo	ca. 290-ca. 350
		Teón	ca. 335-ca. 405
		Siriano	ca. 380-ca. 438
Próximo Oriente	31. Gerasa	Nicómaco	ca. 60-ca. 120

En la época en que floreció Euclides ya habían contribuido al desarrollo de la matemática un enjambre importante de grandes figuras. El terreno estaba abonado para que la geometría griega alcanzase su esplendor y así lo pone de manifiesto el que, en esa misma época, aportaran su inestimable obra Arquímedes y Apolonio.

ANTES DE EUCLIDES

En sus *Comentarios*, Proclo cita las aportaciones geométricas que anteceden a los *Elementos*. Es, sin duda, una lista sesgada (véase la tabla de las páginas 32-33), con un énfasis indiscutible en la aportación de la Academia, de la que era director, en menoscabo de las provenientes del Liceo aristotélico. El texto contiene ochenta líneas de texto y su cita literal sería excesiva. A continua-

TEXTOS GRIEGOS LLEGADOS A NUESTROS DÍAS

El análisis del número de textos griegos de matemáticas conservados por especialidades y épocas arroja el panorama que se refleja en la siguiente tabla. La mayoría de textos —aproximadamente la mitad— son de geometría; siguen los de astronomía y los de mecánica. Se constata, pues, un importante interés por la aplicación de la matemática. Los textos se reparten por igual entre las tres épocas. ¿Es razonable pensar que la pérdida de textos es tanto mayor cuanto más lejana es la época? De ser cierto, el número de textos de la época helenística sería bastante mayor. En cualquier caso, de la época anterior a Platón y de Aristóteles solo conocemos las citas posteriores de fragmentos de la *Historia de la matemática* de Eudemo y de otras obras de Autólico de Pitane. Todo ello hace menos sorprendente que en el Liceo prearistotélico se preocuparan por la historia de la matemática desde los albores hasta Euclides. Sería Eudemo quien elaboraría dicha historia, por temas. Por desgracia, se ha perdido y solo se tiene un conocimiento parcial e indirecto gracias a las citas de autores algunos siglos posteriores, ya de nuestra era.

Especialidades	
Aritmética	3
Geometría	34
Astronomía	15
Óptica	2
Armónica (Música)	5
Mecánica	10
Geografía matemática	1
Geodesia	2
Logística (problema de los bueyes de Arquímedes)	(1)
Otros	3
Total	75 (76)
Reparto por épocas	
Época helenística (300 a.C.-30 a.C.)	21
Época romana (30 a.C.-300)	24
Época tardana (300-550)	20
Época inasignable	10 (11)

Fuente: Ramón Masià, «Corpus de la matemática griega con introducción».

ción se ofrecen unas líneas y una síntesis de lo que se atribuye a cada autor, así como de los requisitos que una demostración correcta —como las que se ofrecen en *Elementos*— hubiese requerido. Escribe Proclo:

> Puesto que tenemos que considerar el comienzo de las ciencias y de las artes en el período actual, diremos que muchos autores creen que la geometría, que nació de la medida de los campos, la inventaron los egipcios [...] Del mismo modo que el conocimiento exacto de los números tuvo su origen en los fenicios a causa de su comercio y de sus transacciones.
>
> Tales fue el primero que importó de Egipto a la Hélade esta teoría [...] Después de ellos Pitágoras transformó la doctrina en enseñanza [...] Tras ellos, Hipócrates de Quíos descubrió la cuadratura de las lúnulas y Teodoro de Cirene [...] Platón [...] dio un gran impulso a la matemática, en general, y a la geometría, en particular. [...] Muy amigo de los alumnos de Platón fue Eudoxo de Cnido [...].

Matemáticos que, según Proclo, precedieron a Euclides		
Nombre	**Cita de Proclo**	**Enunciados de los diferentes libros de los *Elementos* que se supone que conocían**
Tales	El primero que importó esta teoría de Egipto a la Hélade. Descubrió muchas cosas, una parte importante de las cuales dio a conocer a sus sucesores: algunas, en general, y otras, de una forma más sensible.	LI, definición 17; proposiciones 5, 15, 26, y quizá la 32. LIII, proposición 12.
⋮	⋮	⋮
Pitágoras	Transformó la doctrina en una enseñanza. Examinó los principios de la geometría desde arriba. Investigó los teoremas de una forma inmaterial e intelectual y descubrió la dificultad de los números irracionales y la construcción de las figuras cósmicas.	LI, definiciones 1, 3 y 6; noción común 5; proposiciones 2, 17, 32, 36, 37, 45 y 47. LII, proposiciones 14 y 20. LIII, proposiciones 11 y 14. LIV, proposiciones 11, 12 y 15. LVI, proposiciones 25, 28, 29 y 31. LVII, definiciones 3, 4, 5, 11 y 13.
⋮	⋮	⋮

Oenopide	Estudió muchas cuestiones de geometría y dio la solución canónica de algunas: uso de la regla y el compás.	LI, postulados 1, 2 y 3; proposiciones 12 y 23.
Hipócrates	Descubrió la cuadratura de las lúnulas. Compuso unos *Elementos*. Usó —por generalización— el principio de reducción en el caso de la duplicación del cubo.	LI, proposiciones 9, 10, 11, 12, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 28, 29, 31, 32, 45 y 47. LII, proposiciones 6, 12, 13 y 14. LIII, definición 11; proposiciones 3, 20, 21, 22, 26, 27, 28, 29, 30 y 31. LIV, proposiciones 5, 9 y 15. Además, LVI, proposiciones 19 y 20; LVII, proposición 2; LXIII, proposición 12.
Teodoro	Famoso como geómetra.	Resultados del LII o LI, proposición 47.
Platón	Dio un gran impulso a la matemática, en general, y a la geometría, en particular. Sus consideraciones matemáticas suscitaron una gran admiración en todos los filósofos del momento.	
Leodamas, Arquitas y Teeteto	Contemporáneos de Platón. Aumentaron los teoremas y los presentaron como un conjunto unitario de cariz científico.	Resultados de los LX y LXIII.
⋮	⋮	⋮
León	Elaboró unos elementos, y descubrió los diorismos, que permiten saber cuándo un problema es posible o imposible.	
Eudoxo	Amplió el número de los teoremas generales. [...] Y muchas de las cuestiones sobre la sección, por medio del análisis, que había iniciado Platón.	LV, definiciones 4 y 5, y las proposiciones generales. LX, proposiciones 1 y 2. LXII, proposiciones 5, 6, 7 y 10.
⋮	⋮	⋮
Menecmo y Dinostrato	El primero fue discípulo de Eudoxo; al segundo se le conoce como «su hermano». Ambos perfeccionaron la geometría.	
⋮	⋮	⋮
Filipo de Mende	Investigó siguiendo las indicaciones de Platón. Con él se alcanzó la madurez de la geometría.	

El texto está fuertemente influenciado por la *Historia de la geometría* de Eudemo de Rodas y por el neoplatonismo del autor. Faltan, pues, los nombres de los astrónomos que siguieron las huellas de Eudoxo; asimismo, no hay referencia alguna a los aristotélicos, incluida la figura del propio filósofo; se hallan en falta Aristeo, «el viejo» —probablemente el padre del estudio de las cónicas y los *lugares*—, Hipaso de Metaponte o Filolao; tampoco hay referencia alguna a los sofistas Antifón, Brisón e Hipias de Elis; ni a los atomistas como Parménides, Zenón o Demócrito; ni de Autólico de Pitane. Y, por fin, ninguna mención a los estudiosos de la aritmética. Con todo, la lista es muy importante y merece una detenida atención.

En los casos de Tales y Pitágoras, las aportaciones son las que les atribuyen diversos autores; en el caso de Hipócrates es la que ofrece el romano Simplicio, remitiendo a la información de Eudemo en la *Historia de la geometría*.

CAPÍTULO 2

La estructura de los «Elementos»

Tan importante como los teoremas que contiene es la forma en que Euclides estructuró los *Elementos*: partiendo de una breve lista de hipótesis, el autor procede a demostrar deductivamente una larga serie de proposiciones. Este proceso otorga al edificio euclídeo una solidez en apariencia inexpugnable. Pero esa solidez esconde una serie de asunciones sobre la naturaleza misma de la matemática, que se remontan a la filosofía de Platón y Aristóteles.

Los *Elementos* son, como ya se ha dicho, herederos de las enseñanzas de Platón y de Aristóteles. Para Platón, los entes matemáticos son *ideales*, es decir, gozan de una existencia propia en el plano de las ideas. Para Aristóteles, no. Se puede afirmar que el texto de Euclides es esencialmente aristotélico. Sin embargo, vale la pena detenerse un instante en la filosofía de la matemática platónica, una de las cuestiones en que la Academia puso mayor atención, como atestigua el lema apócrifo del frontispicio de la institución: «No entre nadie que no esté instruido en geometría».

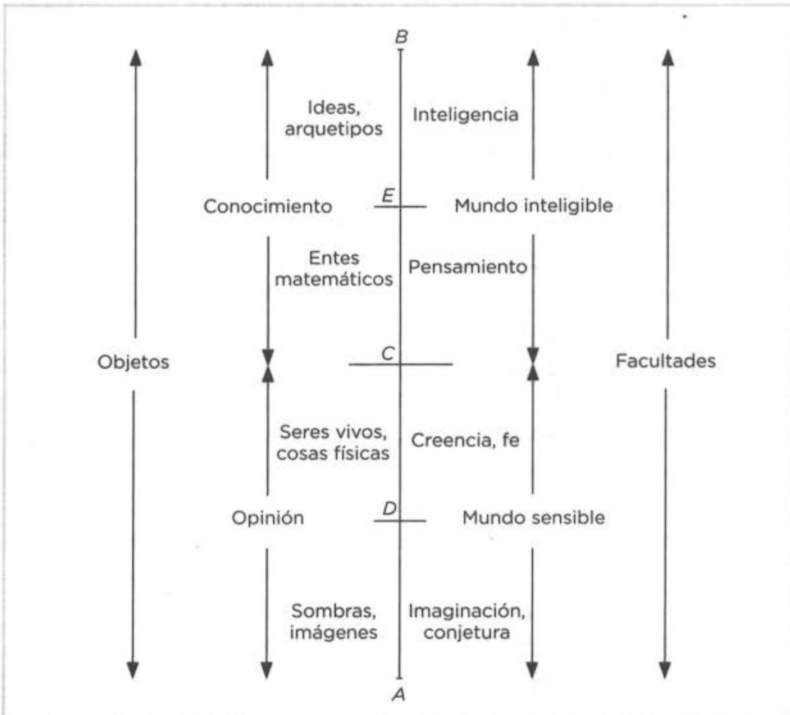
En el caso de Platón nos limitaremos a comentar el *símil de la línea* de la *República* (véase el esquema de la página siguiente). Se distinguen tres representaciones del objeto «lecho»: el «lecho» creado por Dios, el «lecho» fabricado por el carpintero, y el «lecho» que el pintor representa en el lienzo. «Dios —dice Platón— fabrica el lecho verdadero, el lecho en sí mismo o esencial, el lecho por naturaleza, que es *único.*» El carpintero, en cambio, fabrica simples *imitaciones*. Y el pintor hace *representaciones* de las imitaciones del carpintero, pero no del «lecho verdadero».

Lo que se trata en este ejemplo es la cuestión de la *existencia*, uno de los ejes principales de la filosofía platónica en tanto que, para Platón, no es posible disociar la epistemología (qué es el conocimiento y cómo se llega a él) de la ontología (qué es la realidad objeto de conocimiento). Se plantean las preguntas siguientes:

¿Son reales los tres lechos, o alguno de ellos, o ninguno? ¿Qué entendemos por «real», es decir, de qué realidad hablamos cuando decimos que el conocimiento científico consiste en el «conocimiento verdadero de lo real»? Si nos ceñimos a la matemática se plantean las preguntas: ¿Cómo debemos entender —cuestión relativa a la *naturaleza epistemológica*— los objetos matemáticos? ¿Qué podemos decir —cuestión relativa a la *naturaleza ontológica*— de su existencia?

Según Platón, hay dos realidades: la del mundo ideal, situado en el nivel de lo «inteligible», y la del que nos circunda, que se sitúa en el nivel de lo «opinable». Y, en el símil de la línea, Platón ubica el pensamiento discursivo en el nivel inteligible, es decir, solo podemos entender el nivel superior, el de lo inmutable, el de las ideas; el nivel inferior, el de lo mutable, solo es susceptible de opinión.

Símil de la línea del Libro VI de la *República* de Platón.



LA ACADEMIA DE PLATÓN

La Academia de Atenas fue la escuela filosófica fundada por Platón hacia 388 a.C. Se construyó en los jardines de Academo, el legendario héroe griego de la Antigüedad y fue refundada por última vez en 485, tras la muerte de Proclo. En el año 529 sería clausurada definitivamente por el emperador Justiniano. Entre sus paredes se desarrolló gran parte del trabajo filosófico y científico de la época. En la Academia se investigó en medicina, se perfeccionó la retórica y se profundizó en la astronomía, con énfasis en la teoría heliocéntrica, artes, todas ellas, sobre las que se mantenía una discusión abierta y fructífera.



Vista exterior de la moderna Academia de Atenas, con las estatuas de Platón y Sócrates.

De acuerdo con este símil, los entes son o bien mutables (parte baja de la línea) y, por tanto, objeto de *doxa* (opinión), o bien inmutables (parte alta), susceptibles de *gnosis* (conocimiento). Los entes matemáticos son inmutables, pero se sitúan en un punto intermedio: no pertenecen a la parte baja, pero tampoco

a la excelsa. El texto establece una diferencia clara entre la manera de usar el pensamiento en el *discurso dialéctico* (propio del filósofo) y en el *científico* (propio del matemático).

El proceso matemático usa hipótesis, pero jamás vuelve a ellas. La validez de la matemática es limitada y es provincia del *pensamiento*. La *inteligencia* —la operación más elevada del alma, propia del filósofo— va más allá de las hipótesis. No hace matemática —que va de las hipótesis a los teoremas—, sino que filosofa, cuestionando la matemática misma: ¿Qué justifican las hipótesis? ¿Por qué son aceptables? ¿Podrían ser otras? Al quehacer matemático le falta «subir» —en un retorno— de las conclusiones a las hipótesis.

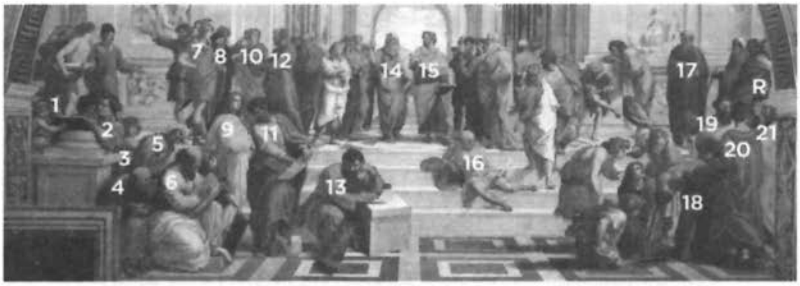
En cuanto a las figuras matemáticas, dice:

> — Sabes igualmente que se sirven de figuras visibles que dan pie para sus razonamientos, pero que *en realidad no piensan en ellas*, sino en aquellas cosas a las que se parecen. Y así discurren por el cuadrado en sí y por la diagonal en sí, y no a la que dibujan. Y lo mismo con el resto. De las cosas que configuran y que dibujan hay sombras en el agua, y las usan con este carácter de imagen pues saben que la *realidad* de estas cosas solo puede ser percibida con el pensamiento.
>
> — Así es.

Así, cuando un matemático establece la validez de una propiedad de un triángulo, en general, como por ejemplo en la proposición 16 del Libro I, no importa la naturaleza del triángulo —que sea acutángulo, rectángulo, obtusángulo— aun cuando la «figura concreta», a la que recurre como soporte del razonamiento, sea, por ejemplo, un triángulo acutángulo. Y, cuando es el caso que la propiedad que pretende establecer depende de la naturaleza del triángulo, entonces da un teorema para cada uno de los casos, como ocurre con el «teorema de Pitágoras generalizado», que da lugar a tres teoremas: Libro I, proposición 47 y Libro II, proposiciones 9 y 10.

LA ESCUELA DE ATENAS

La escuela de Atenas fue pintada por Rafael en 1509 como encargo del papa Julio II. La obra representa a la filosofía, una de las cuatro facultades clásicas junto con la teología, el derecho y la medicina. Rafael reúne en la obra a los que en la Edad Media se consideraban los padres del pensamiento, pero tomando de modelo a personajes públicos de la época, como Leonardo da Vinci encarnando a Platón o Miguel Ángel como Heráclito.



Los personajes identificados
1: Zenón de Citio o de Elea. 2: Epicuro. 3: Federico II Gonzaga. 4: Boecio o Anaximandro o Empédocles. 5: Averroes. 6: Pitágoras. 7: Alcibíades o Alejandro Magno. 8: Antístenes o Jenofonte. 9: Hipatia (como Margherita) o Francesco Maria della Rovere. 10: Esquines o Jenofonte. 11: Parménides. 12: Sócrates. 13: Heráclito (Miguel Ángel). 14: Platón (con el *Timeo*, Leonardo da Vinci). 15: Aristóteles (con la *Ética*). 16: Diógenes de Sinope. 17: Plotino.18: Euclides o Arquímedes (Bramante). 19: Estrabón o Zoroastro. 20: Claudio Ptolomeo. 21: Protógenes. R: Apeles (Rafael).

Platón sintetiza brevemente la esencia del conocimiento matemático en la carta VII:

> Es necesario pasar por tres factores para acceder al *conocimiento* de cada una de las cosas que son; el cuarto es el propio conocimiento, y el quinto ha de ser considerado el ente cognoscible que es verdaderamente. El primero es el nombre; el segundo, el discurso; el tercero, la imagen, y el cuarto, el conocimiento.

Luego explica con detalle cada ítem: el *definiens* —círculo— el *definiendum* —la definición—, la figura —«se traza y se borra»— y la opinión verdadera —sus propiedades intrínsecas, en el caso de la matemática, los teoremas relativos—.

Aristóteles, por su parte, escribe en *Analíticos segundos* que la ciencia demostrativa combina dos puntos de vista: el relativo al significado, que concierne a los términos; y el de la existencia, ontológico, que concierne a los objetos. Una segunda distinción atraviesa la anterior: se deben distinguir los términos y objetos primeros y los términos y objetos (o propiedades) derivados. Los enunciados que establecen significados o existencias son *tesis* y distingue, además, entre los que establecen los significados —las *definiciones*— y los que establecen la existencia —las *hipótesis*—.

Las definiciones «no dicen nada de la existencia del objeto definido»; responden a la pregunta «¿qué es?» y no a la pregunta «¿existe?». Las *hipótesis*, a su vez, se dividen en *nociones comunes* —el intelecto no puede dudar de ellas, pues son convincentes por sí mismas— y en *postulados*, que son menos evidentes y que «imponen» la existencia de ciertos objetos. Las nociones comunes a menudo se denominan *axiomas*, aunque los matemáticos modernos no observan una diferencia esencial entre nociones comunes (o axiomas) y postulados.

En cuanto a los objetos matemáticos, los hay «primeros» —por ejemplo, la unidad en aritmética, o la magnitud en geometría—, cuya existencia «se da». Sin embargo, la existencia del resto de los objetos hay que establecerla. Las proposiciones o teoremas refieren a objetos existentes: «si el sujeto no existe el enunciado es falso». La cuestión de la existencia es fundamental. No se trata, como en Platón, de una existencia ideal, previa a todo, sino de una existencia que queda fijada una vez se acepta el axioma de partida o la demostración que conduce a ella.

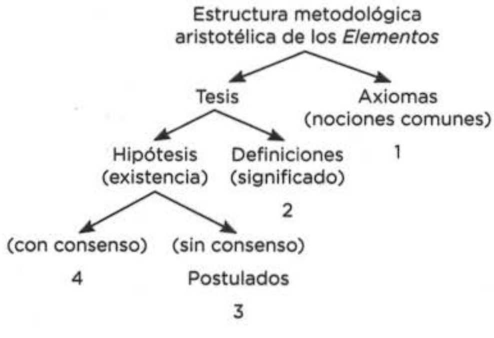
En *Analíticos segundos* Aristóteles dice:

Una hipótesis es aquello que, si se supone su verdad, nos permite establecer una conclusión. Como alguien ha dicho, las hipótesis de

> la geometría no son falsas. Entiendo los que dicen: «No se puede usar lo que es falso y aunque un geómetra afirma *falsamente*, de la recta que ha trazado, que tiene la longitud de un pie cuando no la tiene, o que es recta cuando, de hecho, no lo es». El geómetra no basa ninguna conclusión en la línea recta que ha dibujado aun cuando así lo afirme. En realidad, se refiere *a lo que ilustran* dichas figuras. Más aún, el postulado y cada una de las hipótesis son afirmaciones universales o afirmaciones particulares; las definiciones, no.

Aristóteles fijó entonces el procedimiento con el que se construye el pensamiento en la ciencia. Parece análogo al de Platón, pero no lo es: no hay distinción entre la validez de los postulados y una validez ulterior que está más allá del conocimiento sensible. Hay unas verdades que fijan la existencia, y unas nociones comunes que tienen un ámbito de aplicación más amplio. La concatenación —como si se tratase de concatenación de silogismos— va de la verdad autoevidente a la verdad del teorema: la verdad de las nociones comunes y la de los teoremas son de la misma naturaleza. Sin embargo, Aristóteles tiene necesidad de las definiciones, otro punto en el cual su pensamiento y el de Platón —discípulo y maestro— difieren: las condiciones necesarias y suficientes están íntimamente ligadas a los términos aceptados y aceptables en las definiciones, y hacen que sean correctas.

En síntesis, la filosofía de la ciencia —y, en particular, de la matemática— de Aristóteles se puede resumir como se muestra en el siguiente esquema:



EL CONTENIDO DE LOS «ELEMENTOS»

De acuerdo con la tradición, los libros originales de Euclides reunidos bajo el nombre común de *Elementos* son trece, escritos en «habla común», con símbolos denotadores de los objetos geométricos, sobre todo puntos, magnitudes y números. Con posterioridad, se añadirían otros dos libros: el XIV de Hipsicles y el XV de autoría desconocida; quizá de Isidoro de Mileto.

De las más de mil ediciones que ha conocido los *Elementos*, la primera se debe a Erhard Ratdolt (1442-1528). La imprimió en Venecia en 1482 —apenas treinta años después de la Biblia de Gutenberg—, en base a la edición comentada del erudito italiano Giovanni Campano de Novara (1220-1296), quien a su vez partió de la traducción del monje inglés Adelardo de Bath (1080-1150).

Los cuatro primeros libros, que evitan el recurso de la teoría de la proporción y, por tanto, hay que considerar muy orientados a la didáctica, están dedicados a la *geometría plana*. Sin embargo, son de naturalezas diferentes:

— El Libro I es fundamental: incluye, además de veintitrés definiciones, los cinco postulados y las cinco nociones comunes. Fundamentalmente trata de la teoría de los triángulos. Instituye las bases para usar la técnica del tángram en las demostraciones y de la regla y el compás en las construcciones. El libro se cierra caracterizando los triángulos rectángulos: son los que cumplen el teorema de Pitágoras. Pone de manifiesto el potencial deductivo del método de la *reducción al absurdo*.

— El Libro II contiene el álgebra geométrica: es decir, los cómputos algebraicos básicos $(x \pm y)^2 = x^2 + y^2 \pm 2xy$, $x^2 + y^2 = (x+y)(x-y)$ y sus derivados, pero no con números sino con magnitudes (segmentos) y, por consiguiente, requieren de una construcción; la resolución geométrica de las ecuaciones de segundo grado en línea de los *Datos*; la construcción del segmento áureo, y el teorema del co-

seno, generalización del teorema de Pitágoras a triángulos no rectángulos (acutángulos y obtusángulos). Este libro, que contiene dos definiciones, se cierra con la proposición 14, la cual proporciona el último eslabón de la cuadratura de las figuras rectilíneas multiláteras.

— El Libro III ofrece la geometría de la circunferencia, y contiene once definiciones.

— El Libro IV ofrece la construcción, con regla y compás, de los polígonos regulares: triángulo equilátero (también en Libro I, proposición 1), cuadrado (proposiciones 6 y 7), pentágono (proposición 11), hexágono (proposición 15) y pentadecágono (proposición 16). Contiene siete definiciones.

Los Libros V y VI, cuyo contenido se atribuye a Eudoxo de Cnido, contienen la teoría de la proporción y sus aplicaciones a la geometría. Son técnicos y constituyen la base del teorema de Tales para rectas y para superficies multiláteras rectilíneas y del cálculo de áreas y volúmenes.

— El Libro V es un libro fundamental para comprender la profundidad de los logros de la geometría griega en el período de la Academia. En él se dan dieciocho definiciones de entre las que cabe distinguir la de razón y la de proporción. Establece las propiedades que rigen la teoría de la proporción y aparecen las proporciones compuestas.

— El Libro VI contiene los teoremas de Tales, y, por tanto, los de la altura y del cateto del triángulo rectángulo, de los que se deduce, de forma indirecta, el teorema de Pitágoras. Es un capítulo importante con cuatro definiciones, una de las cuales probablemente es espuria.

Los Libros VII, VIII y IX —atribuidos, no sin ausencia de polémica, a la escuela pitagórica— contienen los elementos de la

aritmética en base a una teoría de las partes alícuotas o números racionales.

- El Libro VII establece que el uno no es un número; es un concepto en virtud del cual «todo lo que es, es uno». Define los conceptos *parte* y *número primo*, los fundamentos de la divisibilidad; establece el algoritmo y el lema de Euclides. Contiene veintidós definiciones que cubren los tres libros aritméticos, la última de las cuales es la de número perfecto.

- El Libro VIII se dedica al estudio de las proporciones continuas de números naturales: son las progresiones geométricas, fundamentalmente en base dos.

- El Libro IX contiene un teorema notable: la existencia de una cantidad no finita de números primos, necesario —y puede ser que suficiente— para establecer el teorema fundamental de la aritmética.

- El Libro X —con reminiscencias de Teodoro y de Teeteto— contiene el estudio de los inconmensurables y la clasificación de las líneas irracionales. De entre todos los libros de los *Elementos*, se trata del más largo, el más técnico y el que ha quedado más obsoleto. Ofrece dieciséis definiciones, no todas originales de Euclides, y las líneas que aparecen en las construcciones de los sólidos platónicos del Libro XIII.

- El Libro XII contiene el método de exhaución, un término controvertido pero que se ha mantenido a lo largo de los siglos. Mediante este método se calcula el área del círculo y de los volúmenes de la pirámide, el cono y la esfera. Es un libro difícil y de una gran técnica superado, sin embargo, por la genialidad de Arquímedes a la hora de abordar problema de este cariz. Su contenido se atribuye básicamente a Eudoxo.

— El Libro XIII contiene la construcción de los cinco sólidos platónicos: el tetraedro, el hexaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. También se demuestra que solo existen esos cinco. Fue en la Academia donde Teeteto construyó el octaedro y el icosaedro que, al parecer, no habían sido construidos por la escuela pitagórica.

«Las matemáticas comenzaron a ser una ciencia cuando alguien, probablemente un griego, enunció proposiciones acerca de cualquier cosa o de alguna cosa sin especificar ninguna particularidad.»

— Alfred North Whitehead (1861-1947).

Los trece libros de Euclides contienen 140 asunciones básicas —130 definiciones, 5 postulados y 5 nociones comunes— y 465 proposiciones derivadas de aquellas —93 problemas y 372 teoremas—, así como unos pocos resultados auxiliares: 19 porismas y 16 lemas.

El Libro XIV es obra de Hipsicles de Alejandría (ca. 190 a.C.-120 a.C.) y data del siglo II a.C. La introducción tiene un interés histórico indudable. Los resultados más notables son las relaciones entre las superficies y los volúmenes de los sólidos platónicos. El Libro XV, obra de Isidoro de Mileto, data del siglo VI. Es muy inferior al anterior y establece la posibilidad de inscribir ciertos polígonos regulares en otros.

Vale la pena exponer las dependencias de las proposiciones de un libro de las de los precedentes (véase la tabla de la página siguiente).

Los Libros VII, VIII y IX son independientes del resto, ya que las dependencias con otras partes de la obra (Libros II y V) se pueden subsanar fácilmente con la introducción de definiciones ad hoc. El resto se estructura alrededor de dos bases conceptuales, la del Libro I y la del Libro V. Corresponden, grosso modo, a las aportaciones previas y posteriores a la Academia. Los Libros X al XIII dependen fuertemente de ambas fuentes.

Dependencias de las proposiciones de los diferentes libros de los *Elementos*.

Libro I	Es independiente.
Libro II	Depende del Libro I.
Libro III	Depende del Libro I y de las proposiciones 5 y 6 del Libro II (II5 y II6).
Libro IV	Depende del Libro I, de III1 y del Libro III.
Libro V	Es independiente.
Libro VI	Depende de III27, 31 y de los Libros I y V.
Libro VII	Independiente.
Libro VIII	Depende de definiciones de los Libros V y VII.
Libro IX	Depende de II3 y 4 y de los Libros VII y VIII.
Libro X	Depende de I44, 47; del Libro II; de III31; de los Libros V y VI; de VII4, 11, 26; de IX1, 24, 26.
Libro XI	Depende del Libro I; de III31; de IV1; de los Libros V y VI.
Libro XII	Depende de los Libros I y III; y de IV6 y 7; de los Libros V y VI; de X1 y del Libro XI.
Libro XIII	Depende de los Libros I, de II4; de los Libros III, IV, V, VI, X y XI.

LOS ELEMENTOS PRIMEROS DE LOS «ELEMENTOS»

Conviene precisar lo que cabe entender por *elemento* en el contexto de la geometría. En *Tópicos*, Aristóteles es tajante sobre su importancia: «En geometría es bueno ejercitarse en los elementos»; y Proclo, en *Comentarios*, también:

> Si la geometría cuenta con unos elementos, se podrá entender el resto de la ciencia, mientras que sin ellos no será posible comprender su complejidad y resultará inalcanzable.

Es precisamente Proclo quien precisa las diversas acepciones que se le han atribuido. Para Hipócrates de Quíos, el elemento es una proposición que desempeña un cometido capital en la obtención y organización deductiva de otros resultados; para Menecmo

tiene dos acepciones: la *débil*, cuando adopta la forma de un lema previo (como, por ejemplo, Libro I, proposición 1 respecto del Libro I, proposición 2), y la *fuerte*, que incluye solo las definiciones, las nociones comunes y los postulados. Es precisamente por este sentido fuerte por el que el texto de Euclides adquiere toda la legitimidad para llamarse *Elementos*, si bien responde también a la forma débil, ya que, una vez establecidos los principios, la obra se estructura deductivamente con un alto nivel didáctico.

Por esta razón los *Elementos* no contienen la totalidad de resultados geométricos conocidos sino solo los que constituyen la base de desarrollos ulteriores. En este sentido, supera a otros *Elementos* que los precedieron. Los geómetras como Arquímedes, Apolonio, Eratóstenes, Ptolomeo, Papo o Proclo los toman como referente básico de la tarea matemática. De este modo el Libro I ha adquirido, además, un contenido epistemológico muy relevante.

La estructura del libro, como ya se ha dicho, es básicamente aristotélica. De las nociones comunes (véase la tabla) —recordemos: verdades autoevidentes—, nos fijaremos en cinco y si cabe en una sexta. Aluden a la relación de índole cuantitativa de la igualdad y de la desigualdad. Son válidas para las magnitudes geométricas, los números naturales y las razones. Su rango de validez es, pues, más amplio que el estricto de la geometría y, de hecho, son conceptualmente anteriores si nos atenemos al proceso metodológico-discursivo.

Nociones comunes
1. Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.
2. Si a cosas iguales añadimos cosas iguales, los totales son iguales.
3. Si de cosas iguales quitamos cosas iguales, los restos son iguales.
[3b. Si, en cambio, les añadimos cosas desiguales, los totales son desiguales.] Esta noción común aparece solo en algunas ediciones.
4. Las cosas que se superponen son iguales.
5. El todo es mayor que la parte.
[6. Dos rectas no contienen espacio.] Esta noción común aparece solo en algunas ediciones.

Sin embargo, dos nociones comunes, la 4 y la [6], escapan a esta precisión, puesto que se refieren simplemente a objetos geométricos y, por tanto, deberían incluirse entre los postulados. La noción común 4 introduce indirectamente el movimiento: si movemos dos objetos [geométricos] y conseguimos superponerlos, es que antes de ser movidos eran iguales. Y la [6] —que Euclides usa, por ejemplo, en la proposición 4 del Libro I— es geométrica: se refiere a objetos geométricos y a cuestiones de (no)-existencia.

Por su parte, los postulados (véase la tabla) establecen condiciones de existencia y, en ciertos casos, existencia constructiva de ciertos objetos geométricos.

Postulados
1. Entre dos puntos siempre se puede trazar una recta.
2. Una recta se puede prolongar continuamente de una recta.
3. Se puede trazar un círculo de centro y radio dados.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si dos rectas son cortadas por una tercera de manera que los ángulos internos de un lado sumen menos de dos ángulos rectos, entonces se cortan del lado en que los ángulos suman menos de dos ángulos rectos.

Los tres primeros se refieren a lo que se denomina el *uso de la regla y el compás* en las construcciones geométricas. Afirman que son válidas —existen— las rectas que tienen como extremos dos puntos (y, que además, se pueden prolongar de una recta finita), y las circunferencias de centro y radio dados. El compás, sin embargo, «no tiene memoria»: si levantamos uno cualquiera de los pies del compás, este se cierra. En la proposición 2 del Libro I Euclides demuestra que un compás así considerado, sin embargo, se comporta igual que otro «con memoria».

Reflexionemos un instante acerca de la existencia de los objetos definidos. Para Platón, la existencia es algo «real». Lo único que hace una definición es dar un nombre al objeto existente, para podernos referir a él, y permite atribuirle una imagen. Para Aris-

tóteles, la cuestión es muy diferente. Según él, la definición no dice nada de la existencia: para los entes primeros, la existencia se postula; para los segundos, debe establecerse. Y, claro está, ello introduce limitaciones a la existencia. Aristóteles escribe:

> De lo que no existe, nadie sabe lo que es; por consiguiente, no sabemos a qué se refiere el discurso o el nombre como cuando me refiero al carnero-ciervo del cual nadie puede saber a qué me refiero cuando lo nombro.

La definición no implica, pues, la existencia, pero, por coherencia, debe corresponder a alguna realidad. En general, la existencia en geometría deberá establecerse después de una definición precisa del objeto. En consecuencia, habrá que tener muchísimo cuidado en usar las definiciones en las demostraciones antes de haber establecido que el objeto definido existe.

> «Les han de traer ejemplos palpables, fáciles, inteligibles, demostrativos, indubitables, con demostraciones matemáticas que no se pueden negar, como cuando dicen: Si de dos partes iguales quitamos partes iguales, las que quedan también son iguales.»
>
> — Orientaciones metodológicas para la conversión de los infieles puestas en boca de Lotario, *El Quijote.*

Existe una clara diferencia entre las primeras definiciones, que precisan de conceptos no definidos como «parte, anchura, longitud», etc., y las siguientes, que se basan en la aceptación del conocimiento de los entes geométricos previos, como por ejemplo el círculo, el centro, el diámetro, las figuras triláteras, etc. Aristóteles afirma que, de algunos objetos o conceptos, la existencia se da por cierta: son la «línea», la «línea recta» y la «magnitud», en geometría; y la «unidad», en aritmética. Tampoco faltan las incoherencias internas. En la definición de *diámetro* se lee: «Esta recta divide al círculo en dos partes iguales», pero esta es una propiedad que habría que demostrar, no una definición.

Algunas definiciones del Libro I
1. *Punto* es lo que carece de partes.
2. *Línea* es una longitud sin anchura.
3. Los *extremos* de una línea son puntos.
4. La *línea recta* es aquella que descansa por igual sobre sus puntos.
⋮
8. Un *ángulo plano* es la inclinación de dos líneas de un mismo plano que no reposan sobre una misma recta.
9. Si ambas líneas son rectas el ángulo es *rectilíneo*.
10. Si una recta tirada sobre otra forma con ella ángulos contiguos iguales, cada uno de los ángulos se llama *recto*, y la recta tirada es una *perpendicular* sobre la otra.
⋮
15. Un *círculo* es una figura plana limitada por una sola línea —la *circunferencia*—, respecto de la cual son iguales todas las rectas que inciden sobre ella, tiradas desde un punto que se halla en su interior.
16. Dicho punto es el *centro* del círculo.
17. El *diámetro* de un círculo es una recta cualquiera que pasa por el centro y tiene los extremos en la circunferencia. Esta recta divide al círculo en dos partes iguales.
⋮
19. *Figuras rectilíneas* son las comprendidas por rectas; *trilíneas* las comprendidas por tres; *cuadriláteras* las contenidas por cuatro; *multiláteras*, las comprendidas por más de cuatro.
20. Entre las figuras triláteras el *triángulo equilátero* es el que tiene tres lados iguales, el *isósceles*, el que solo tiene dos, y el *escaleno*, el que no tiene ninguno.
21. Entre las figuras triláteras, el *triángulo rectángulo* es el que tiene un ángulo recto; *obtusángulo* el que tiene un ángulo obtuso; y *acutángulo* el que tiene los tres ángulos agudos.
22. De entre las figuras cuadriláteras, el *cuadrado* es el que es equilátero y rectangular; el *rectángulo* es el que es rectangular pero no equilátero; el *rombo* es el que es equilátero pero no rectangular; el *romboide* tiene los lados y los ángulos opuestos iguales entre sí pero no es ni equilátero ni rectangular; y el *trapecio* no es de ninguno de los tipos anteriores.
23. Dos rectas *paralelas* son las que, hallándose en un mismo plano, prolongadas *indefinidamente* no se cortan por ningún lado.

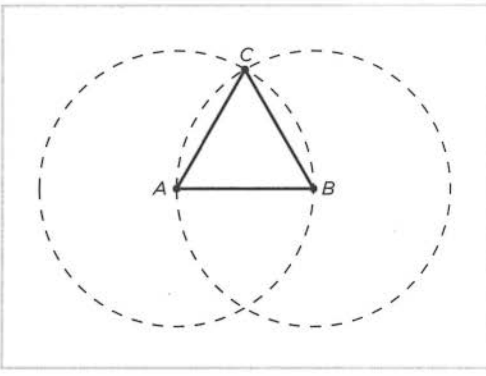
EL MÉTODO DEDUCTIVO DE LOS «ELEMENTOS»

Hemos visto que las definiciones no determinan la existencia, y que tal existencia debe «establecerse». Para ello hay que resolver un problema del estilo «existe un objeto tal como...». Y, en el tratado euclídeo, las herramientas permitidas para la construcción de objetos geométricos son las rectas y las circunferencias, y solo estas. En consecuencia, los únicos puntos aceptables —los únicos que existen— son aquellos en que tales líneas se cortan.

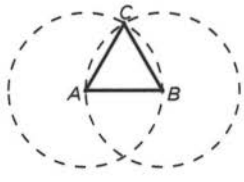
Una vez construido el objeto —«problema» resuelto— debemos asegurarnos de que es precisamente lo que queríamos; es decir, que «lo construido» cumple los requisitos de su definición. Hay que establecer un «teorema». Los teoremas «dan la existencia por supuesta»; se formula «he aquí [el objeto]» y lo que hacen los teoremas es ver que existe un ligamen lógico entre diversos asertos.

En los problemas se requiere del *análisis*, es decir, conocer lo básico para llegar al objeto. Por ejemplo, a partir del lado dado *AB* habrá que ver qué recursos se precisan para poder construir el triángulo equilátero. Para ello es útil suponer la existencia del objeto como ya construido y ver qué es lo que liga sus componentes (véase la construcción del pentágono regular en el capítulo 4). En los teoremas, en cambio, lo esencial es la *síntesis*. De los postulados al resultado requerido. La proposición 1 del Libro I, si bien es muy simple, permite apreciar la distinción entre análisis y síntesis. De esta misma proposición estudiaremos también su estructura interna.

Libro I, proposición 1. *Sobre una recta dada construir un triángulo equilátero* (véase la figura).



En este texto se aprecian, de forma precisa, todos los extremos indicados (véase la tabla de la página siguiente). Se trata de un problema. La construcción se hace con los postulados 3 y 1. La de-

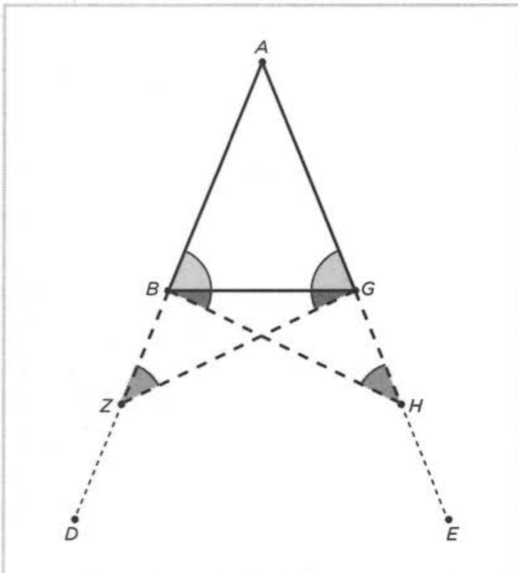
Partes de un teorema	
Prótasis (Enunciado)	Sobre una recta dada construir un triángulo equilátero.
Ékthesis (Exposición)	Sea *AB* una recta dada.
Diorismós (Determinación)	Debemos construir un triángulo equilátero sobre *AB*.
Kataskeue (Construcción) 	Con centro en *A* y radio *AB* trazamos la circunferencia ○*AB* (postulado 3). Con centro en *B* y radio *BA* trazamos la circunferencia ○*BA* (postulado 3). Desde el punto *C*, intersección de ambas circunferencias, tiramos las rectas *CA* y *CB* (postulado 1).
Apódeixis (Demostración)	Puesto que el punto *A* es el centro de la circunferencia ○*AB*, *CA* es igual a *AB* (definición 15). Análogamente, puesto que B es el centro de la circunferencia ○*BA*, *BC* es igual a *BA* (definición 15). Pero cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí (noción común 1). Por lo tanto, *CA* es también igual a *CB*. Por consiguiente, las rectas *AB, CB, CA* son iguales.
Syumpérasma (Conclusión)	Por lo tanto, el triángulo $\triangle ABC$ es equilátero y hemos construido lo que queríamos. *QED*.

mostración recurre a la definición 15, a la noción común 1, y a los principios mínimos de lógica. Cabe notar que la suposición de la existencia del triángulo equilátero $\triangle ABC$ proporciona muchas intuiciones tanto para la construcción como para la demostración y ejemplifica el uso del análisis; en este caso muy simple. La demostración, sintética, también se puede intuir de la imagen «ideal», pues en ella los lados son asimismo iguales y «forman» un triángulo. En otros casos, esto será mucho más complicado como, por ejemplo, en el caso del pentágono regular.

La proposición primera es «un elemento» —en sentido débil— de la proposición siguiente, que permite llevar un «segmento congruente con uno dado a un punto dado» —¡el compás

tiene memoria!—, lo cual permite «añadir» segmentos para formar otro, e incluso de la proposición tercera, que permite «quitar» de un segmento otro menor que él.

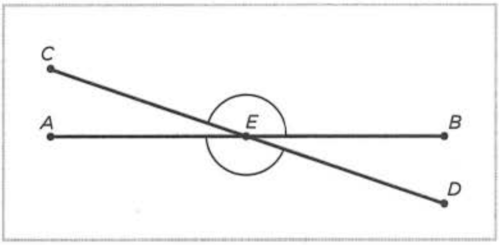
Vamos a analizar otras dos demostraciones para comprobar el método lógico-deductivo de los *Elementos*:



Libro I, proposición 5. *En los triángulos isósceles los ángulos de la base son iguales entre sí* (véase la figura).

1. Sea $\triangle ABG$ un triángulo isósceles cuyos lados iguales son AB y AG (definición 20).
2. Los prolongamos, respectivamente, de segmentos iguales BZ y GH (noción común 2, proposición 2).
3. Unimos Z con G y H con B (postulado 1).
4. Los triángulos $\triangle AGZ$ y $\triangle ABH$ son iguales (proposición 4, criterio lado-ángulo-lado, LAL, de igualdad de triángulos) ya que tienen, respectivamente, iguales los lados AZ y AH (noción común 2) y AG y AB (por el punto 1) y el ángulo común que comprenden. Por consiguiente, los ángulos $<AZG$ y $<AHB$ son iguales, y los lados ZG y HB.
5. Los triángulos $\triangle GBZ$ y $\triangle BGH$ son iguales (proposición 4), luego los ángulos $<BGZ$ y $<GBH$ son iguales. Los quitamos, respectivamente, de los ángulos $<ABH$ y $<AGZ$ y los ángulos que resultan ($<ABG$ y $<AGB$) son iguales (noción común 3). QED.

Libro I, proposición 15. *Si dos rectas se cortan, los ángulos verticales son iguales entre sí* (véase la figura de la página siguiente).



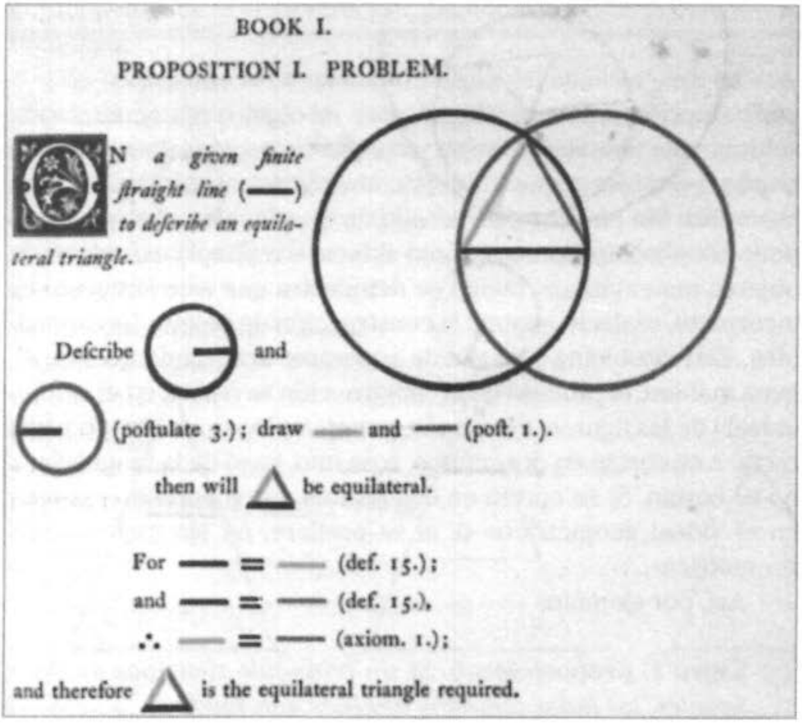
1. Las rectas *AB* y *CD* se cortan en el punto *E* (enunciado).
2. Queremos ver que los ángulos <*AED* y <*CEB* son iguales.
3. Los pares de ángulos <*CEB* y <*CEA*; <*CEA* y <*AED* suman, respectivamente, dos ángulos rectos (Libro I, proposición 13).
4. Luego los pares de ángulos <*CEB* y <*CEA*; <*CEA* y <*AED*, juntos, son iguales (postulado 4 y noción común 1).
5. Si quitamos, de ambos pares, el ángulo <*CEA*, los ángulos resultantes <*CEB* y <*AED* son iguales (noción común 3). *QED*.

Observemos el recurso a definiciones, proposiciones ya demostradas, nociones comunes y postulados. Con ellos, mediante un proceso de concatenación de construcciones y de enunciados llegamos a lo que se demanda a partir de lo que se propone. Y observemos la enorme elegancia de dichas demostraciones que proviene de su simplicidad.

Pero Euclides no siempre recurría a la demostración directa; a veces precisaba de un método indirecto de demostración: la *reducción al absurdo*. En dicho método se postula lo contrario de lo que se quiere establecer —aquí el maestro Euclides y el alumno «lector» deben estar de acuerdo— y, razonando, se llega a una proposición y su negación, un resultado inadmisible. En consecuencia, el postulado inicialmente aceptado es falso, y su contrario —que es lo que se quiere demostrar— es cierto. He aquí un presupuesto «lógico» que no se explicita nunca: de dos sentencias opuestas —una es la negación de la otra— necesariamente una es cierta, y la otra, falsa. Aunque Euclides no explicitara en ningún momento el método de la reducción al absurdo, lo utilizó muchísimo. Este método de demostración, difícilmente justificable por análisis, es esencialmente aristotélico y pertenece al ámbito de la síntesis.

Llegados a este punto, consideremos ahora un nuevo ejemplo en que se observa cómo Euclides recurría, en las demostraciones





BOOK I.

PROPOSITION I. PROBLEM.

ON *a given finite ſtraight line* (—) *to deſcribe an equilateral triangle.*

Deſcribe ◯ and ◯ (poſtulate 3.); draw — and — (poſt. 1.).

then will △ be equilateral.

For — = — (def. 15.);

and — = — (def. 15.),

∴ — = — (axiom. 1.);

and therefore △ is the equilateral triangle required.

FOTO SUPERIOR:
Fragmento de un papiro que contiene el diagrama que acompaña a la proposición 5 del Libro II de los *Elementos* de Euclides, hallado en el yacimiento de Oxirrinco, una antigua ciudad que se encontraba a unos 160 km de El Cairo, en Egipto.

FOTO INFERIOR:
Presentación «figural» de la proposición 1 del Libro I a cargo de Oliver Byrne (1810-1890).

ARISTÓTELES Y LA IRRACIONALIDAD DE $\sqrt{2}$

El estagirita empleó el método de la reducción al absurdo para demostrar que:

No hay ninguna razón numérica cuyo cuadrado valga 2.

En lenguaje actual, esto significa: «$\sqrt{2}$ es irracional». Aristóteles parte de la aceptación del postulado contrario al que quiere demostrar, a saber: $\sqrt{2}$ es racional. El ilustre filósofo griego concluyó que dicha aceptación le obligaba a admitir que «un número par es, a su vez, impar» lo cual no es posible. Su razonamiento, expresado en su forma actual, es el siguiente:

Supongamos (hipótesis añadida) que

$$2=\frac{m^2}{n^2},$$

con m y n de distinta paridad. Así, $2n^2 = m^2$. Por consiguiente, m es par —o sea, $m = 2m'$— y n impar. Luego, $2n^2 = 4m^2$. Es decir, $n^2 = 2m'^2$ y n sería par.

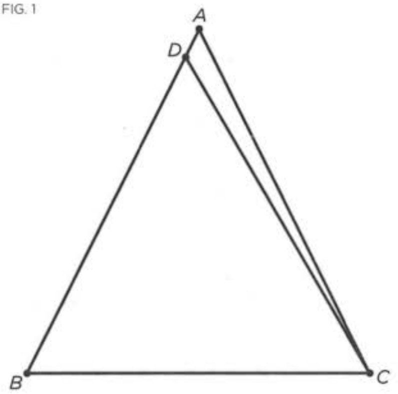
por reducción al absurdo, a imágenes de objetos matemáticos absolutamente «ideales». Como ya hemos visto, una demostración requiere establecer que los objetos matemáticos construidos son correctos. Sin embargo, el método de la reducción al absurdo supone admitir inicialmente, como si fuesen reales, la existencia de objetos matemáticos. Luego se demuestra que este supuesto es incorrecto, es decir, supone la construcción de objetos inconstruibles. Este problema solo puede superarse aceptando que, de alguna manera, el proceso de la construcción se realiza en el ámbito «ideal» de las figuras. Pensemos, por ejemplo, en un círculo y una recta: o se cortan en dos puntos, o en uno, caso de la tangencia, o no se cortan. Si se cortan en dos puntos, estos puntos «existen» en el «ideal geométrico» o, si se prefiere, en «la metodología geométrica».

Así, por ejemplo:

Libro I, proposición 6. *Si un triángulo tiene dos ángulos iguales, los lados opuestos también son iguales.*

Euclides recurre a la figura 1 (un triángulo $\triangle ABC$ con los ángulos $<CBA$ y $<ACB$ iguales, y los lados opuestos, AB y AC, distintos; uno, por ejemplo AB, más largo y el otro, AC, más corto). Pero esta figura no es posible: realmente, dicho triángulo *no existe*. Es una idealización figurativa del postulado añadido que resultará ser falso.

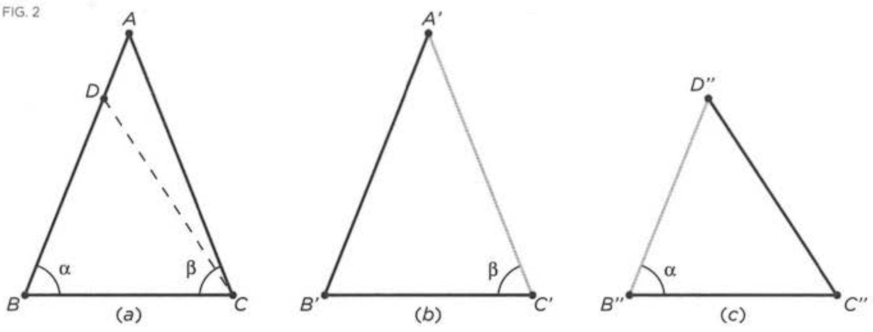
FIG. 1



En la figura 2 se desglosa el razonamiento de Euclides y parece que se clarifica. Sin embargo, pone de relieve —es la razón que nos mueve a incluirlo— las dificultades que presenta recurrir a «figuras erróneas». Si bien el motivo de estas figuras es ayudar a la comprensión de la demostración, cuando son falsas el objetivo se complica.

Se ha perdido la simplicidad propia del análisis pero ha aparecido la profundidad del conocimiento geométrico y lógico-deductivo vinculado a la síntesis. Cabe indicar que esta técnica de demostración —tan alejada del análisis— no era del agrado de todos los geómetras griegos. Ello explica que, en los diferentes comentarios a los *Elementos*, se intentaran demostraciones alter-

FIG. 2



nativas que lo evitaran. Un ejemplo paradigmático de ello es el de Herón de Alejandría.

Sea como fuere, la estructura de los *Elementos* fue lo suficiente potente como para eclipsar cualquier tratado precedente, y seguramente se trate de su herencia más importante. Nos quedan por explorar los contenidos concretos: una reseña del Libro I y del método del tángram, el papel del infinito, el significado y dependencia del postulado de las paralelas, la naturaleza e importancia de las magnitudes irracionales y del método de exhaución, la construcción de los sólidos platónicos y, por fin, la gran contribución pitagórica: la aritmética.

CAPÍTULO 3

El Libro I y la geometría del universo

El estudio del primer libro de los *Elementos* nos enfrenta a cuestiones fundamentales acerca de la geometría propuesta por Euclides. Algunas son de tipo técnico y otras, acaso las más fascinantes, atañen al modo en que el geómetra aborda el espinoso problema del infinito o a la relación entre las figuras abstractas de la geometría y la realidad natural. Esta última cuestión, que parte del célebre postulado de las paralelas, nos conducirá, en un viaje de casi dos mil años, a la geometría no euclídea que revolucionó la ciencia en el siglo XIX.

El Libro I de los *Elementos* de Euclides es el único que contiene tanto nociones comunes como postulados. Los tres primeros, como ya se ha indicado, hacen referencia a las herramientas aceptables para «construir» los objetos geométricos; son, pues, muy importantes en la resolución de problemas. Los otros dos son clave a la hora de configurar la naturaleza de la geometría euclídea. Además, y sin ser exhaustivos, el Libro I plantea otras cuestiones que merecen comentario: el movimiento, la torsión, el infinito y el método tángram, que se tratará más en profundidad en el capítulo 4. Veamos en primer lugar de qué manera el cuarto postulado de los *Elementos* tiene que ver con el movimiento en la geometría. Dicho postulado establece:

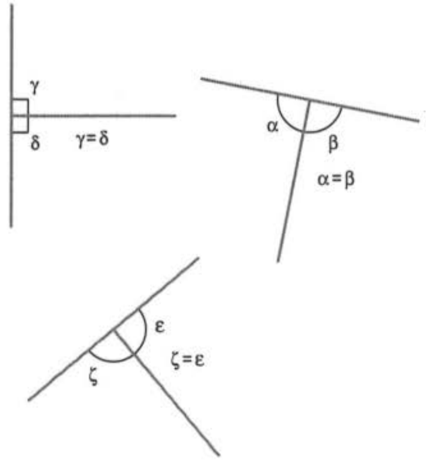
Todos los ángulos rectos son iguales.

Si nos fijamos en la definición de ángulo recto —Libro I, definición 10— leemos:

> En cada pareja de ángulos adyacentes iguales, cada uno de los ángulos es *recto*.

Es decir, cuando ambos «son iguales», ambos son rectos (figura 1). Pero entonces se nos plantea la cuestión de saber si los

FIG. 1



De acuerdo con la definición 10, las parejas de ángulos α, β, γ, δ y ε, ζ son iguales. Es decir, α=β, γ=δ y ε=ζ. Luego, tanto α como β, γ como δ, ε como ζ son ángulos rectos.

de una pareja son iguales a los de otra pareja. Es decir, si «todos» los ángulos rectos son iguales; no solo por parejas. La respuesta, afirmativa, nos la da el cuarto postulado.

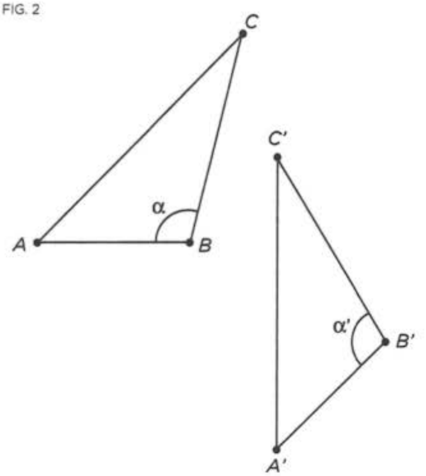
En el caso particular de los ángulos rectos, Euclides impone una cierta uniformidad del plano. Se trata, pues, de un postulado que, de alguna manera, involucra el *movimiento* de figuras. También la noción común 5 lo imponía; pero no podemos acudir a una noción común para justificar por entero una cuestión puramente geométrica. De hecho, en el seno de la geometría euclídea, ningún postulado garantiza explícitamente que dos figuras que se superponen sean iguales. Dicho de otro modo: la noción común 5 debía haber sido un postulado, como ya se señaló en el capítulo anterior.

A pesar de todo ello, Euclides no supo —o mejor: no pudo— evitar el movimiento, si bien recurrió a él en muy escasas ocasiones; por ejemplo, en la geometría del espacio para generar el cono y la esfera por rotación, respectivamente, de un triángulo rectángulo alrededor de uno de los catetos y de un círculo alrededor de un diámetro. También lo empleó en dos proposiciones del Libro primero —la 4 y la 8— para establecer los *criterios de igualdad de triángulos* lado-ángulo-lado (LAL) y lado-lado-lado (LLL). Sin embargo, en el criterio ángulo-lado-ángulo (ALA) es ya capaz de evitarlo. Veamos el primero de estos casos:

> **Libro I, proposición 4.** *Si dos triángulos tienen dos lados, respectivamente, iguales [congruos] y los ángulos que determinan también, respectivamente, iguales [congruos], entonces también serán iguales [congruos] el otro lado y los dos triángulos* (figura 2).

Todo el peso de la demostración reside en la *superposición* de ambos triángulos y de la noción común 5. Reza como sigue: Coloquemos los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$, uno encima del otro (movimiento) de manera que el ángulo $\angle ABC$ coincida con el ángulo $\angle A'B'C'$. Entonces, naturalmente, los lados AB y BC se colocan, respectivamente, encima de los lados $A'B'$ y $B'C'$. Pero, por los puntos $A[=A']$, $C[=C']$ pasa una sola recta (noción común 7). Luego los triángulos se superponen enteramente y, por la noción común 4, antes de moverse eran iguales. Por consiguiente, los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son iguales. Llegados a este punto, hay que indicar que el uso inconsistente de Euclides en lo que respecta al movimiento no se debe a una falta de habilidad por su parte. El único modo de ser consistente, en este caso, es el de incorporar esta proposición en la forma de un postulado, como haría el matemático alemán David Hilbert (1862-1943) siglos más tarde en su propia axiomatización de la geometría, mucho más rigurosa.

FIG. 2



LA RECTA QUE NUNCA EXISTIÓ

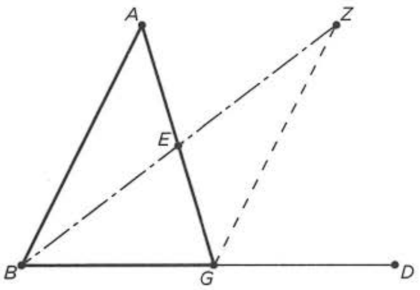
Nótese que Euclides, a pesar de las definiciones 2 a 4 del Libro I, jamás precisó qué es una recta, qué propiedades tiene y a qué características se debe someter. Sin embargo, dejó bien establecido que son finitas y «tienen extremos que son puntos». En realidad, Euclides manejaba *segmentos rectilíneos*. Al hablar de la igualdad en longitud de los diámetros en la definición de círculo, Euclides recurrió, ahora sí, al concepto de distancia. En cambio, para su

FIGURAS QUE SE CONTORSIONAN

Una cuestión subyacente en los *Elementos* es la que se refiere a la torsión. Antes de usar el postulado de las paralelas, Euclides establece un resultado harto peculiar. Se trata de:

> **Libro I, proposición 17.** *En todo triángulo, dos ángulos juntos suman menos de dos ángulos rectos.*

Para comprender convenientemente el problema debemos observar el razonamiento de Euclides. Quiere ver que los ángulos <*BAG* y <*AGB* juntos son inferiores a dos ángulos rectos. Para ello, «lleva» un ángulo igual al ángulo <*BAG* —el ángulo <*EGZ*— junto al ángulo <*AGB* y observa que, juntos, no llenan <*AGB* más <*AGD* —que serían dos rectos—. ¿Cómo «lleva» el ángulo? Construyendo un triángulo que lo tenga como ángulo. ¿Cómo? De acuerdo con la demostración siguiente:



1. Divide el lado *AG* por la mitad: obtiene el punto *E* (Libro I, proposición 10).

aplicación al concepto de recta debemos esperar el axioma 1 —«la distancia más corta entre dos puntos»— de *Sobre la esfera y el cilindro* de Arquímedes.

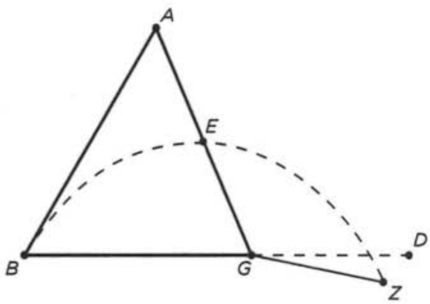
Como acabamos de comprobar en el caso de la proposición 4, Euclides usaba «postulados» que no había establecido. En la demostración de la proposición 1 del Libro I, vista en el capítulo anterior, hay una afirmación que ahora vamos a examinar más en detalle:

> Desde el punto *C*, intersección de ambas circunferencias, tiramos las rectas *CA* y *CB*.

2. Une *B* con *E* (postulado 1) y lo dobla (postulado 2 y Libro I, proposición 2). Obtiene el punto *Z*.

3. Lo une con el punto *G* (postulado 1). Obtiene dos triángulos iguales (Libro I, proposición 4), puesto que los lados *ZE* y *EG* del triángulo △*ZEG* son respectivamente iguales a los lados *BE* y *EA* del triángulo △*BEA*, por construcción, y los ángulos <*GEZ* y <*AEB* son opuestos por el vértice y, por lo tanto, iguales (Libro I, proposición 15). Luego, ambos triángulos son iguales y el ángulo <*EGZ* (que se añade al ángulo <*AGB*) es igual al ángulo <*BAG*, que es lo que quería.

Euclides obtenía este resultado porque el punto *Z* cae dentro del ángulo <*AGD*. Pero ¿no podría haber caído fuera? En la figura se observa que sí es posible. La respuesta a la pregunta anterior, que Euclides no llega a facilitar por el simple hecho de que ni siquiera se la había planteado, es que «no», porque «sus» líneas rectas no tienen torsión. Lo da por evidente, pero cuando más adelante se analice el postulado de las paralelas, se verá que estas ausencias lógicas minan algunas demostraciones de forma fatal.



¿Qué garantiza, según Euclides, la existencia de este punto *C*? Nada, salvo la imagen que acompaña la demostración. Pero este recurso no es admisible, porque la imagen solo es correcta si el punto *C* existe (recordemos las falsas imágenes de triángulos imposibles en la demostración por reducción al absurdo).

Es curioso que Euclides, en el postulado 5, impusiera que «en ciertas condiciones», dos rectas se cortan: «existe un punto que pertenece a la vez a ambas», y que, en cambio, en el caso de las circunferencias, lo diera por tan evidente e irrefutable que ni siquiera hubiera que imponerlo. A todos los efectos, se trata, nuevamente, de un postulado «oculto».

El triángulo equilátero sobre el segmento *AB* de la proposición 1 «existe» porque la construcción euclídea es correcta; pero dicha construcción depende de la existencia del punto *C*. En un universo en el que dicho punto no existiera, el triángulo tampoco existiría. Muchas de las primeras demostraciones de los *Elementos* de Euclides dependen de este elemento en particular. De hecho, la «constructibilidad» de los *Elementos* depende de la constructibilidad de puntos. Euclides impone la condición necesaria y suficiente para que dos rectas se corten y, por tanto, establece adecuadamente los puntos construidos de este modo. Sin embargo, Euclides no establece en qué condiciones se producen los cortes entre una recta y una circunferencia o entre dos circunferencias y, por tanto, los puntos generados de esta forma son «inválidos».

«Cada vez estoy más convencido de que no es posible demostrar la necesidad de nuestra geometría mediante el intelecto humano ni tampoco para su servicio.»

— Carl Friedrich Gauss.

Y no habría sido demasiado difícil: en el caso de las circunferencias, por ejemplo, le bastaría con haber impuesto:

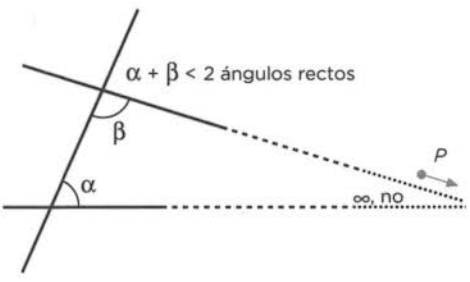
> **Postulado de intersección de dos circunferencias**. *Si la distancia que hay entre los centros de dos circunferencias es inferior a la mitad de los diámetros de ambas juntos [esto es, menor que dos radios, uno de cada circunferencia, juntos] ambas circunferencias se cortan en dos puntos.*

De forma análoga, es fácil imponer una condición que permita asegurar la existencia de «dos puntos» fruto de la intersección de una recta y una circunferencia: *Una recta y una circunferencia se cortan [en dos puntos] cuando la perpendicular que va del centro de la circunferencia a la recta es inferior al radio*. Sin embargo, Euclides calla al respecto.

EL POSTULADO DE LAS PARALELAS

Todos los estudiosos de la obra euclídea están de acuerdo con el hecho de que la estructura de los *Elementos* y, muy en particular, el postulado 5 (al que denominaremos P5) se deben al propio Euclides. Se trata del famoso *postulado de las paralelas* que, en la formulación euclídea dice que «bajo ciertas condiciones, dos rectas necesariamente se cortan». Euclides no hace uso del postulado hasta la proposición 29 del Libro I. La geometría que no depende de aquel se llama *geometría neutral*. Por consiguiente, Euclides nos ofrece una treintena escasa de proposiciones de geometría neutral. El contenido literal del postulado es como sigue:

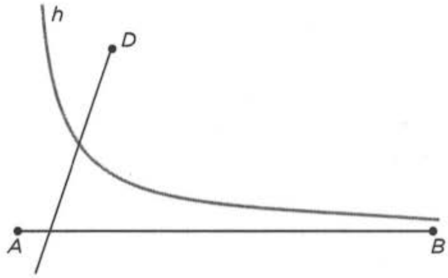
> **Postulado 5 (P5)**. *Si dos rectas son cortadas por una tercera de manera que los ángulos internos de un lado sumen menos de dos ángulos rectos, entonces dichas rectas se cortan del lado en que los ángulos suman menos de dos ángulos rectos.*



Sin embargo, el postulado de las paralelas euclídeo no suele estudiarse en su formulación original, sino en la ofrecida por el escocés John Playfair (1748-1819), profesor de Matemáticas y posteriormente de Filosofía Natural en la Universidad de Edimburgo, que dice:

> **Postulado de Playfair (PP)**. *Por un punto exterior a una recta podemos trazar una paralela y solo una.*

UNA CURVA Y SU ASÍNTOTA



Con el postulado 5, Euclides evita que la «torsión» de las rectas haga que tengan un carácter asintótico, como ocurre con una *hipérbola* y su *asíntota* (y esa precaución es más necesaria si tenemos en cuenta que, como ya hemos visto, Euclides no da una definición cabal de línea recta y, por tanto, desconocemos sus propiedades básicas). En el caso de las curvas, por ejemplo, el hecho de que una se acerque más y más a otra no garantiza que se corten, como se observa en la figura: una hipérbola se acerca más y más a una recta —su asíntota— sin llegar a tocarla jamás.

Este enunciado es equivalente al de Euclides, y nos permite ver que P5 requiere de dos asunciones distintas: por un lado, que *existe* tal cosa como «una recta paralela a una recta dada desde un punto exterior a ella», y por el otro, que dicha recta es *única*.

Precisamente, la *existencia* la da Euclides en la proposición 31, que dice:

Libro I, proposición 31. *Por un punto exterior P a una recta AB, siempre podemos trazarle una paralela.*

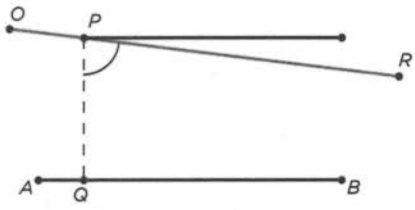


Tiramos por *P* una recta perpendicular *PQ* a *AB* (*Q* se halla en la recta *AB* o en una prolongación y se puede tirar con regla y compás según la proposición 12). Análogamente, tiramos una perpendicular *PR* por *P* a *PQ*. Está claro que las rectas *PR* y *AB* son paralelas porque, si no lo fuesen, se cortarían en un punto, por ejemplo, en el punto *R*, y tendríamos un triángulo $\triangle QPR$ con dos ángulos rectos. Pero ello no es posible (contradeciría la proposición 16 del Libro I) y, por tanto, la existencia de la recta paralela queda establecida. Llegados a este punto, queda pendiente demostrar que dicha recta es única. Pues bien: no es posible hacerlo sin recurrir a un objeto geométrico «falso» (o «ideal»), es decir, a un objeto geométrico que presuponga la asunción que se quiere demostrar. La unicidad de la recta paralela, en definitiva, no se deriva de ninguno de los otros postulados. Esta constatación trajo consigo una auténtica revolución, como veremos más adelante, y buena parte de ello se debe al hecho de que suponía cuestionar a una autoridad de la talla de Euclides.

LA DEMOSTRACIÓN DE LA UNICIDAD DE LA PARALELA

La unicidad de la recta paralela no es demostrable si no es asumiendo la «verdad» de la geometría euclídea, es decir, desde «dentro» de ella.

Por un punto exterior P a una recta AB, solo podemos trazarle una paralela.



Si hubiese dos rectas paralelas a la recta *AB* (figura adjunta: una figura ideal porque depende de una falsedad) serían la primera (que forma ángulo recto con *PQ* en el punto *P*) y otra, *PR*. Entonces el ángulo <*QPR* sería inferior a un ángulo recto (Libro I, proposición 31). Por lo tanto, los ángulos <*BQP* y <*QPR* sumarían menos de dos ángulos rectos (noción común 4). Por el *postulado de las paralelas* (P5), las rectas *PR* y *AB* se cortan. ¡Contradicción! Por lo tanto, hay que abandonar la hipótesis según la cual *PR* es paralela.

LAS GEOMETRÍAS NO EUCLÍDEAS

Una pregunta que no se puede obviar al tratar de geometría es: ¿cuál es la verdadera geometría de la naturaleza? Porque no cabe duda de que uno de los objetivos de la axiomatización consiste en «captar la verdad de lo que es». Ahora bien, también podría ser que en su lugar estuviéramos meramente «captando la verdad de lo que pensamos», es decir, una creación de la mente humana, no necesariamente real.

Las dos geometrías «reales» de la época de Euclides eran la geometría del cielo —la *esférica*, necesaria para comprender los procesos astronómicos tan caros a los griegos y antes a los egipcios y babilonios— y la *geometría del patio de casa* —la que realizaba Arquímedes, según la leyenda, cuando el soldado romano lo atravesó con la espada—. La primera, que hoy día se conoce también con el apelativo de *elíptica*, es equivalente a la que podemos dibujar en la superficie de un globo terráqueo. En este tipo de geometría, los puntos se definen normalmente, pero las rectas, no. Si entendemos la recta en el sentido arquimediano —la línea más corta que une dos puntos—, veremos que tienen una particularidad: se cortan necesariamente. Imaginemos un caso real: dos personas echan a caminar sobre la esfera de la Tierra en línea recta hasta regresar al punto de partida. Ambos dibujarán necesariamente un *círculo máximo* (es decir, aquella sección de la esfera que la divide en dos hemisferios exactos), y los círculos máximos de una esfera acaban por cruzarse necesariamente (en la figura 3, los dos círculos máximos r y r' se cortan en el punto P). En consecuencia, dada una recta, no es posible trazar ninguna paralela a ella por un punto dado.

La segunda geometría, la del patio de la casa, es la propia de un patio cerrado por paredes en el cual solo se puede dibujar lo que la arena que cubre el suelo permite. En esta geometría, por un punto P exterior a una recta r podemos trazar una *infinidad* de rectas paralelas (figura 4). Así, por ejemplo, se tira desde el punto P las rectas r', r'' y r'''. Solo la recta r'' corta a la recta r dentro del patio. Sin embargo, hay otras: todas las que hay dentro del ángulo

de vértice formado por P y lados las rectas que salen de P y se unen a los extremos de la recta r. Estos puntos se hallan en la pared y no en el suelo del patio; en el suelo del patio no existen. Por lo tanto, r y r''' no se cortan; son paralelas. Las rectas que no se hallan en el interior de ese ángulo son, como los lados del ángulo, rectas paralelas a la recta r.

Una representación gráfica muy conocida de este tipo de geometría, hoy día conocida como *hiperbólica*, es la que se dibuja sobre una superficie parecida a una «silla de montar» (figura 5). Sobre una superficie de este tipo, un triángulo equilátero adopta una forma curiosa, en la que la suma de sus ángulos es de menos de 180°. Por su parte, dos rectas paralelas tenderán a alejarse infinitamente (en otros casos, las paralelas hacen lo contrario, es decir, se acercan cada vez más).

Esta segunda geometría la descubrirían, independientemente, el húngaro János Bolyai (1802-1860) y el ruso Nikolái Ivánovich Lobachevski (1792-1856), a principios del siglo XIX. Este último guardaba muchas reservas con respecto a la necesidad de la geometría euclídea (es decir, con respecto a si era la única posible) ya en 1823, precisamente a raíz de los

FIG. 3

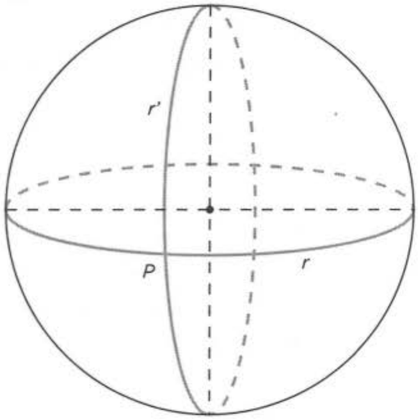


FIG. 4

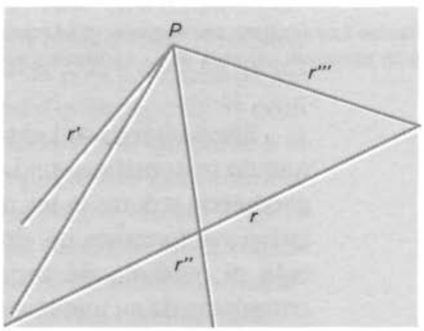


FIG. 5



intentos vanos hasta la fecha de demostrar la unicidad de la paralela partiendo de los otros postulados del alejandrino.

La publicación en 1829 de un artículo de este último de título «Sobre los principios de la geometría» marcó el nacimiento oficial de lo que vino a llamarse la geometría no euclídea. En él, el matemático ruso hizo pública la primera geometría construida sobre una hipótesis que contradecía el postulado euclídeo de las paralelas: por un punto *C* exterior a una recta *AB* puede pasarse más de una recta paralela contenida en el plano *ABC* y que no corte a la recta *AB*. A partir del postulado así reformulado, Lobachevski procedió a deducir una geometría armónica y consistente.

«No se ha descubierto hasta ahora ninguna demostración rigurosa de su verdad.»

— Nikolái Lobachevski en referencia al postulado de las paralelas en un bosquejo general de la geometría redactado en 1823.

Sin embargo, tal era el estatus de Euclides y su obra en el mundo matemático que Lobachevski quiso quitar hierro a la nueva geometría y durante los primeros años se refirió a ella con el apelativo vergonzante de «imaginaria». Entre 1835 y 1855 tuvo además el cuidado de redactar no menos de tres exposiciones completas de su nuevo sistema. El escritor y matemático escocés E.T. Bell, en su célebre *Los grandes matemáticos* (1937), escribió, con su pompa habitual:

> Durante 2200 años se creyó, en cierto sentido, que Euclides había descubierto una verdad absoluta o una forma necesaria de percepción humana en su sistema de Geometría. La creación de Lobachevski fue una pragmática demostración del error de esta creencia. La audacia de su oposición y su triunfo han conducido a los matemáticos y a los científicos en general a contradecir otros axiomas o verdades aceptadas, por ejemplo la ley de causalidad que durante siglos pareció tan necesaria para el pensamiento como el postulado de Euclides parecía hasta que fue eliminado por Lobachevski.

> Es probable que todavía no se haya hecho sentir totalmente la conmoción producida por el método de Lobachevski de negar los axiomas. No hay exageración en llamar a Lobachevski el Copérnico de la geometría, pero la geometría es solo una parte del más amplio campo que renovó. Por ello sería más justo denominarle el Copérnico de todo el pensamiento.

En paralelo (y la expresión es totalmente justa) a Lobachevski, el húngaro János Bolyai llegaba a las mismas conclusiones que aquel. Su padre, Farkas, había pasado la mayor parte de su vida intentando probar el postulado de las paralelas, sin éxito.

Aunque el hallazgo de János tuvo lugar en la misma fecha que el de Lobachevski (1829), no lo publicó hasta 1832 por miedo a las consecuencias que tal herejía matemática podía suponer y, por ello, la prioridad del descubrimiento de la primera geometría no euclídea se atribuye a veces al matemático ruso en exclusividad.

Farkas recabó la opinión de su buen amigo Carl Friedrich Gauss, el más célebre matemático vivo de la época, acerca de los trabajos de su hijo, a lo que Gauss respondió que no podía en conciencia elogiar la obra de János porque sería como elogiarse a sí mismo, dada la coincidencia entre ambos puntos de vista sobre la cuestión. De esta carta se sigue que Gauss también había llegado a la conclusión de que el postulado de las paralelas en la redacción euclídea no se seguía del resto y había desarrollado, no sabemos hasta qué punto de detalle, otras geometrías consistentes.

Tal vez sea esta renuencia de Gauss a publicar sus propios hallazgos en la materia, siendo como era el más respetado matemático vivo, la que nos dé la medida más justa de hasta qué punto era atrevido cuestionar la obra del gran Euclides. La prudencia de Gauss llegó hasta a negar tanto a Bolyai como a Lobachevski el apoyo público a sus trabajos, aun cuando estos ya habían sido publicados, por temor a, según sus propias palabras, «la mofa de los beocios».

En cuanto a la geometría esférica, la otra gran geometría no euclídea, hubo que esperar a la labor de otro conocido de Gauss, el gran matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866), que en una de las tesis más famosas de la historia de la ciencia («Sobre los fundamentos de la geometría») generalizó este y otros casos

en el marco de una visión de la geometría de suprema elegancia que atendía solamente a la curvatura métrica de los diferentes espacios y las propiedades que de ello se derivaban. Riemann demostró que el espacio euclídeo —y con él, la geometría euclídea que lo define— era un caso particular de espacio de curvatura constante y valor cero. En este tipo de espacio los ángulos de un triángulo suman 180°, pero hay otros. Por ejemplo, está el espacio esférico, donde los ángulos de un triángulo suman más de 180° y que posee una curvatura positiva, o el hiperbólico donde, como ya hemos visto, los ángulos de un triángulo suman menos de 180° y que posee una curvatura negativa.

«Por amor de Dios te lo ruego, olvídalo. Témelo como a las pasiones sensuales, porque, lo mismo que ellas, puede llegar a absorber todo tu tiempo y privarte de tu salud, de la paz de espíritu y de la felicidad en la vida.»

— FARKAS BOLYAI EN UNA CARTA A SU HIJO JÁNOS AL ENTERARSE DE QUE ESTE HABÍA EMPRENDIDO SU MISMA TAREA: PROBAR EL POSTULADO EUCLÍDEO DE LAS PARALELAS.

LA VALIDEZ DE LA GEOMETRÍA EUCLÍDEA

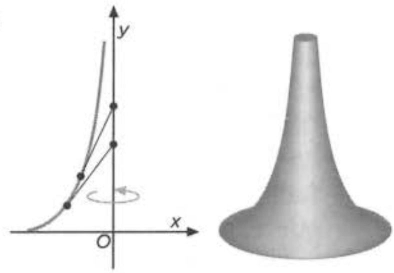
La aparición de estas geometrías alternativas provocó un debate filosófico que se puede resumir con las palabras del artículo póstumo del lógico alemán Gottlob Frege, «Sobre geometría euclídea»:

> Nadie puede servir a la vez a dos señores. No es posible servir a la verdad y a la falsedad. Si la geometría euclídea es verdadera, entonces la geometría no euclídea es falsa. Y si la geometría no euclídea es verdadera, entonces la euclídea es falsa. [...] ¡Dentro o fuera! ¿A cuál hay que arrojar fuera, a la geometría euclídea o a la no euclídea? Esa es la cuestión.

Y sin embargo, no es tan simple. Porque si trabajamos bajo la hipótesis de que una geometría es cierta —la euclídea, por ejem-

LA TRACTRIZ Y LA PSEUDOESFERA

Si se parte de una tractriz —la curva de los puntos cuya distancia sobre la tangente desde el punto al eje *OY*, es constante, figura de la izquierda— y se hace girar alrededor de *OY* (su asíntota), se obtiene la *pseudoesfera*, el primer modelo de la geometría hiperbólica.



plo—, en su seno podemos «fabricar» superficies —la esfera, por ejemplo— cuya geometría es elíptica y otras —el patio de casa, pero bien construido: el primer ejemplo que se dio fue la *pseudoesfera* de Eugenio Beltrami (1835-1900)— cuya geometría es hiperbólica. Lo mismo ocurre si se admite la validez de cualquiera de las otras dos geometrías. Es decir, la validez de una implica la validez de las otras ya que en el seno de cualquiera existen superficies o espacios en los cuales son válidas las otras.

En 1899, Hilbert escribió los *Principios de geometría*, en los que «reescribió» los *Elementos* de Euclides pero, ahora, bien fundamentados y sin recurrir a la intuición ni a los dibujos. Los objetos básicos —ya sean «puntos, rectas y superficies» o «sillas, mesas y jarras de cerveza», en palabras de Hilbert— quedaban definidos por los axiomas que establecen las relaciones que existen entre ellos y por nada más.

No obstante lo dicho, es curioso observar que Euclides escogió como geometría «verdadera» —en lugar de, por ejemplo, la esférica— una geometría *ideal*, es decir, una que se sostiene en construcciones que solo son válidas en tanto que expresiones puras que trascienden la experiencia. Solo puede aducirse como razón para ello una cierta vena platónica en Euclides que le empujó a reconocer tácitamente la existencia de esta geometría ideal, como tal no sujeta a otra realidad que la implicada en la idea misma de geometría.

Pero en el universo la geometría está vinculada a la superficie, es decir, a los objetos geométricos objeto de estudio. Imaginemos que, cual Arquímedes modernos, mientras nos hallamos en la bañera queremos hacer geometría dibujando rectas en las paredes de la misma: unas serían rectas en el sentido euclídeo —en el fondo de la bañera—; otras estarían curvadas hacia arriba —las que van del fondo a las paredes laterales—; otras hacia abajo —las que van de la pared al borde superior—. Hagámonos ahora la pregunta siguiente: ¿Por qué unas tienen derecho a ser llamadas líneas rectas y las otras no? Además, en la geometría de la bañera, las líneas se deforman al desplazarse y pasan de rectas sin torsión a rectas con torsión.

En la teoría de la relatividad general, Einstein establece que, cuando hay grandes masas o energías, el espacio —y consiguientemente las rectas— se deforman: piénsese en una pesada bola de plomo en el centro de la superficie de un gran timbal; la membrana del timbal se deforma —se curva— y una bola más pequeña que estuviese girando alrededor del borde del bombo «caería» en espiral hacia el centro. En el espacio ocurre algo similar: las grandes masas, como la bola de plomo del ejemplo, curvan el espacio-tiempo afectando así al resto de masas. El espacio, pues, es análogo a la superficie del planeta Tierra, que tampoco es uniforme. Y, sin embargo, nadie niega que, globalmente, la superficie de la Tierra es esférica.

Cabe, pues, preguntarse: ¿Cuál es la geometría del universo? Si bien las grandes masas o energías alteran localmente su geometría, el universo ¿es globalmente euclídeo, hiperbólico o elíptico? La respuesta hay que buscarla fuera de la matemática porque a sus ojos las tres geometrías son válidas. Las tres se establecen formalmente y si una es consistente, las otras también lo son. La respuesta pues hay que buscarla en la «realidad»: la bañera no sirve; es tan artificial como los resultados matemáticos.

Hace más de un siglo Carl Friedrich Gauss se hizo la misma pregunta que nos hacemos aquí. ¿Cómo es el universo? ¿Qué geometría tiene? Gauss concluyó que si pudiera medir los tres ángu-

los internos de un triángulo formado por tres estrellas lejanas, obtendría la geometría del universo. Sabemos que:

$$\text{Si la suma de los tres ángulos es} \begin{Bmatrix} > 180^\circ \\ = 180^\circ \\ < 180^\circ \end{Bmatrix},$$

$$\text{la geometría del universo es} \begin{Bmatrix} \text{elíptica (esférica)} \\ \text{euclidiana} \\ \text{hiperbólica} \end{Bmatrix}.$$

Sin embargo, ni los cálculos realizados por el astrónomo y amigo de Gauss, Friedrich Bessel (1784-1846), ni los realizados por Lobachevski resultaron concluyentes. En 1981 el físico estadounidense Alan Guth (1947) introdujo el concepto de *densidad del universo*: la masa total de materia por unidad de volumen. Existe un *valor crítico* $\rho_0 = 4 \cdot 10^{-27}$ kg/m^3 que determina la naturaleza geométrica del universo, así como su evolución futura (véase la tabla).

Posibilidades para la geometría del universo		
Densidad	**Geometría**	**Futuro**
$>\rho_0$	Esférica	Colapso
$=\rho_0$	Euclídea	Expansión suave
$<\rho_0$	Hiperbólica	Expansión fuerte

La masa computada hasta hoy da un 10% de ρ_0. Por ahora, pues, el universo parece que es hiperbólico y se expande fuertemente. Todo ello otorga renovada credibilidad a Galileo cuando escribió estas célebres palabras:

> La filosofía está escrita en este libro que se halla abierto ante nuestros ojos —me refiero al universo—, pero nos será del todo imposi-

ble entenderla, si antes no somos capaces de captar el lenguaje y aprehender los signos con los que está escrita. *Está escrita en lenguaje matemático*. Los símbolos son triángulos, círculos y otros sin los cuales es imposible entender palabra alguna. Sin su comprensión nos hallaríamos errando por un laberinto oscuro [...]

Por lo que parece, hay que recurrir a la geometría para poder entender el universo, opinión que compartiría Isaac Newton y cuya máxima expresión serían precisamente sus *Principia Mathematica Philosophiae Universalis* (1687).

EL INFINITO EN LOS «ELEMENTOS»

No podemos —y no debemos— olvidar la influencia que los filósofos tuvieron en el pensamiento matemático griego. Una de esas influencias fue la de Aristóteles en relación al concepto de infinito. Recordemos que en la *Física* le dedica a este concepto una gran atención. Ya al principio dice:

Melisos afirma que el ser es infinito. Pero entonces el ser sería cantidad, porque lo que es infinito lo es en cantidad, ya que ninguna sustancia puede ser infinita, ni tampoco una cualidad ni una afección, salvo que lo sea de forma accidental [...] Porque, para definir el infinito, hemos de usar la cantidad, pero no la sustancia ni la calidad. Por lo tanto, si el ser es sustancia y cantidad, es dos y no uno. Pero, si solo es sustancia, entonces no será infinito ni tendrá ninguna magnitud, porque tener una magnitud sería tener una cantidad.

Pero su análisis más detallado del infinito lo hace en el Libro III. Se pregunta por la naturaleza y la existencia del infinito y por los tipos de infinitos. Tras un análisis filosófico detallado concluye que hay «un infinito por adición» para los números (aritmética) y otro «por divisón» para las magnitudes (geometría). Ambos infinitos «son —existen— en potencia», jamás «son —existen— en



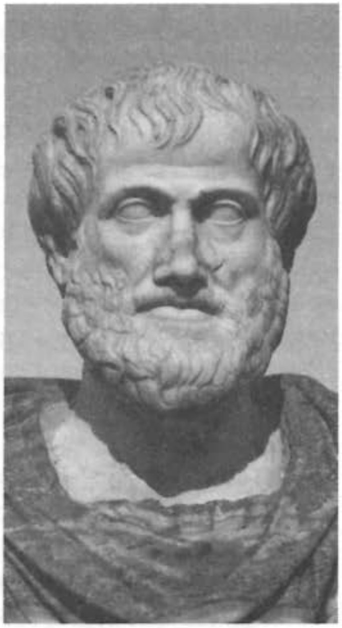


FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
Imagen de Euclides en un sello de las Islas Maldivas (1988).

FOTO SUPERIOR DERECHA:
Busto de Aristóteles.

FOTO INFERIOR IZQUIERDA:
En 1795, el matemático John Playfair propuso reformular el enunciado del postulado 5 de Euclides; dicho postulado se conoce como «axioma de Playfair».

FOTO INFERIOR DERECHA:
El matemático alemán David Hilbert en 1886.





acto». Es decir, en ciencia el infinito no existe como totalidad; ningún objeto se puede considerar infinito. El infinito es solo un proceso generador.

En síntesis, el infinito *en acto* no es, pues, aceptable ni en el «mundo ideal» como idea posible y mucho menos aún cuando se quiere aplicar al mundo de la matemática. Resta, pues, el infinito *en potencia*, que es la «posibilidad» de ir más y más lejos, pero siempre con un número finito de pasos. El proceso nunca se agota; el infinito permanece siempre en el ámbito de la posibilidad. Y, en este sentido, Aristóteles es contundente cuando hace referencia a la necesidad que los matemáticos puedan valerse del infinito en acto:

> Mi argumento no les quita nada a los matemáticos en su estudio, a pesar de que niegue la existencia del infinito en su sentido de existencia actual, entendiéndolo como algo que crece de una manera que ya no sea posible de ir más allá porque, de hecho, *no precisan* ir al infinito ni usarlo; solo precisan que el infinito —por ejemplo, la recta— pueda ser tan largo como sea preciso. Por lo que a las demostraciones se refiere, entre una cosa y la otra, no hay diferencia alguna.

La cuestión —muy importante desde el punto de vista metodológico en el ámbito matemático que ocupa la actividad de Euclides— es la siguiente: ¿Tiene razón Aristóteles cuando dice que su «filosofía» del infinito no afecta al matemático? ¿Hasta qué punto Euclides respeta al estagirita y hasta dónde se ve obligado a conculcar la limitación aristotélica? Por lo que al respeto se refiere, Euclides considera que las «rectas» son «segmentos rectilíneos» y sus extremos —que existen— son puntos; es decir, las rectas son finitas. Define solamente los *segmentos rectilíneos* y estas son las rectas que maneja. Y, en el postulado 5, evita tener que recurrir al paralelismo que, como veremos en seguida, involucra el infinito.

En el ámbito de la aritmética y, en concreto, en la proposición 20 del Libro IX, dice:

Hay más números primos que cualquier cantidad finita de números primos.

El enunciado le permite a Euclides una demostración directa; en cambio, si hubiese aceptado el infinito en acto, como por otro lado se hace hoy en las escuelas, se habría visto obligado a dar una demostración indirecta. Este es uno de los problemas que, en muchas ocasiones, plantea el infinito: nos obliga a recurrir a demostraciones indirectas, por reducción al absurdo.

A continuación, comprobaremos las diferencias metodológicas entre ambos tipos de demostración. Empezaremos por la directa, partiendo del enunciado euclídeo.

Supongamos una cantidad finita de números primos: $a, b, \ldots, m$. Consideremos el número $N = (a \times b \times \ldots \times m) + 1$. En el caso de que N fuese primo, habría un número primo distinto de $a, b, \ldots, m$. En cambio, si N fuese un número compuesto —no primo—, tendría un divisor primo (Libro VII, proposición 32) y, por la construcción de N, debería ser diferente de cada uno de los primos $a, b, \ldots, m$.

Abordaremos ahora la demostración indirecta. Partiremos para ello de un enunciado alternativo de la proposición 20:

Hay infinitos números primos.

En caso contrario, habría una cantidad finita $a, b, \ldots, m$ que contendría la «totalidad» de los números primos. Si copiáramos ahora la demostración anterior, obtendríamos un número primo distinto de $a, b, \ldots, m$; luego, $a, b, \ldots, m$ no serían «todos».

Ahora bien, Euclides no puede evitar completamente el infinito en acto. Así, por ejemplo:

Libro I, definición 23. *Dos rectas* paralelas *son las que, hallándose en un mismo plano, prolongadas* indefinidamente *no se cortan por ningún lado.*

En la definición aparece de forma explícita el término «indefinidamente», que implica el infinito en acto. Además, ya en el Libro I, hay dos proposiciones en las que lo emplea también de forma explícita; en el enunciado, en la primera, y en la demostración, en la segunda. Se trata de dos problemas:

FIG. 6

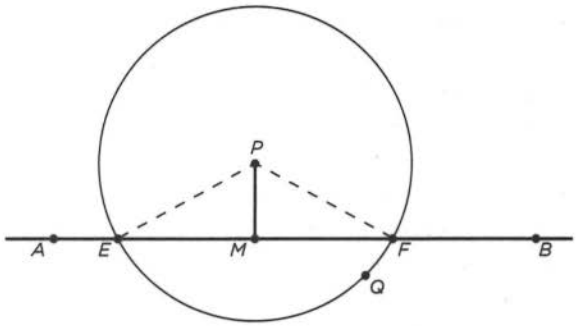
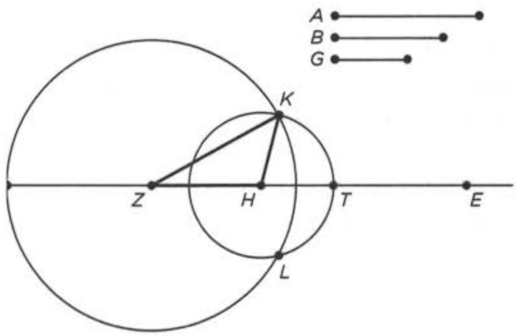


FIG. 7



Libro I, proposición 12. *Por un punto exterior a una recta indefinida tirarle una perpendicular* (figura 6).

Libro I, proposición 22. *Construir un triángulo dados sus tres lados* (figura 7).

¿Cuál es la razón que lleva a Euclides a sortear la limitación aristotélica del infinito en acto? La respuesta es simple. Pretende que lo que establece «sea general»; es decir, no dependa de la particularidad que el dibujo pudiera sugerir. Conviene que la recta a la que queremos tirar la perpendicular sea lo suficientemente larga para poder garantizar que el punto se halla encima de ella, con independencia del punto «concreto» del dibujo. En el otro

caso, debe llevar los tres lados dados encima de una recta; hace falta que la recta los pueda contener con independencia de la longitud «concreta» de cada caso particular; por ello precisa de una semirrecta infinita. Por lo tanto, en cierta medida, la limitación de Aristóteles «les quita» algo a los matemáticos en su quehacer.

Pasarían nueve siglos desde que Aristóteles impusiera limitaciones al uso del infinito y que Proclo escribiera sus *Comentarios del Libro I de los Elementos de Euclides* y diera su propia opinión al respecto. Lo hace en el marco de su análisis de la proposición 12 del Libro I:

> Conviene examinar de qué manera el infinito posee, en general, un fundamento. Es manifiesto que, si una recta es infinita, el plano que la contiene también será infinito, y esto en potencia efectiva [...] Queda, pues, la posibilidad que el infinito exista en la imaginación sin que la imaginación conciba el infinito, porque la imaginación concibe y aplica a la vez una forma y un límite a todo lo que concibe [...] La imaginación no concibe el infinito sino que, hallándose con una incerteza respecto de este objeto, suspende todo pensamiento ulterior y llama infinito todo lo que repudia como algo que no puede ser ni medido ni abrazado por la concepción [...] La imaginación crea, pues, el infinito por la potencia indivisible de poder progresar sin fin y, en lugar de concibir el infinito, lo concibe como supuesto [...] De manera que si coloca la recta infinita en la imaginación de la misma manera que las otras figuras geométricas [...] no nos sorprende que esta recta sea infinita en potencia efectiva y que, tomada de forma indeterminada, se aplica a los conceptos determinados.
>
> Por otro lado, el conocimiento razonado, del cual provienen los razonamientos y las demostraciones, no usa el infinito en la ciencia [...]. No admite el infinito en relación con lo infinito; lo admite en relación con lo finito [...] De lo cual, si sacamos partido del defecto que supone la certeza de que la imaginación tiene limitaciones y que ello constituye el fundamento de la generación del infinito, entonces la ciencia supone la existencia del infinito a fin de que, conservando la línea finita, pueda usar de esta existencia de manera impecable e incontrovertible.

Con este texto se avanza muchos siglos en la tarea de «pensar el infinito». No obstante, hubo que esperar a las aportaciones fundamentales de los alemanes Richard Dedekind (1831-1916) y, sobre todo, de Georg Cantor (1845-1918) —apenas cincuenta años después de que Lobachevski y Bolyai se desembarazaran del quinto postulado— para que la matemática abrazara el infinito en acto y se acabara así con una tradición filosófico-matemática de más de dos mil años.

CAPÍTULO 4

La técnica del tángram en los «Elementos»

Uno de los logros más notables de la geometría china es el uso del tángram para generar figuras de formas distintas pero de la misma superficie. Esta técnica, desarrollada de forma independiente por los geómetras griegos, adquirió, por generalización, una potencia deductiva enorme. En concreto, permitió a Euclides demostrar uno de los teoremas paradigmáticos de la geometría griega —el famoso teorema de Pitágoras—, así como resolver cuestiones milenarias heredadas de los mesopotámicos.

El tángram chino clásico es un método geométrico elemental que se sustenta sobre la base conceptual siguiente:

> Dos figuras realizadas con exactamente las mismas piezas tienen la misma superficie.

Su nombre original es *qī qiǎo bǎn* y significa «las siete tablas de la sabiduría». Conocido en su país de origen desde tiempo inmemorial, en el siglo XIX fue introducido en Occidente como un juego lúdico de disección y como tal se encuentra hoy día extendido en todo el mundo. En su forma de partida, las siete piezas que lo integran suelen disponerse en forma de cuadrado (véase la figura 1, en la página siguiente). Por tanto, todas las formas que puedan construirse con la totalidad de las piezas poseen la misma superficie que el cuadrado original (figura 2).

Esta propiedad permite, entre otras muchas cosas, dar una «mostración» del valor de la diagonal de un cuadrado. Así, el cuadrado de partida puede descomponerse en otros dos de la misma superficie (figura 3). De este modo se constata que con la diagonal del cuadrado de la derecha de esta última figura se puede construir otro (el de partida) cuya superficie es el doble. Se trata de una «mostración» porque se basa en la simple observación de las figuras sin ningún recurso a principio lógico-deductivo alguno.

FIG. 1

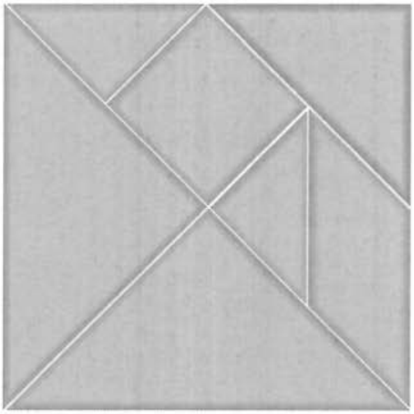


FIG. 2



Se trata de un razonamiento que está estrechamente vinculado al texto que Platón ofrece en el *Menón*, un diálogo sobre la reminiscencia, en el cual Sócrates «muestra» que el esclavo *sabe lo que no sabe que sabe, pero lo sabe.* En él, Sócrates hace un razonamiento análogo al siguiente: sea un cuadrado dado (el de trazo más grueso, según se muestra en la figura 4). Repitámoslo cuatro veces: obtenemos el cuadrado de lado guionado de la misma figura. Seguidamente, hagamos la diagonal del cuadrado dado y, con ella, un cuadrado: el de lado punteado. Está claro que el cuadrado tiene una superficie igual a la de dos cuadrados como el inicial.

Es el mismo recurso que el del tángram: se manipulan con triángulos rectángulos isósceles como los que determina la diagonal del cuadrado tángram de partida. Euclides se sirve a menudo del método del tángram generalizado en el seno de su geometría (es decir, la que depende del postulado de las paralelas). Así, lo emplea en la aplicación de áreas al dividir un segmento de manera que las partes generen un rectángulo con una superficie menor, mayor o igual que la de un cuadrado dado y, en particular, en la resolución geométrica de un *problema mesopotámico* que conduce a la resolución de las ecuaciones de segundo grado; en la *cuadratura de los polígonos multiláteros lineales* —construir un cuadrado que tenga la misma superficie que el polígono multilátero— y, finalmente, en la determinación del *segmento áureo*, operación consistente en dividir un segmento en dos

partes tales que la parte menor junto con el segmento entero formen un rectángulo que tenga la misma superficie que el cuadrado que genera la parte mayor en que ha quedado dividido el segmento.

Euclides disponía de una herramienta básica —el paralelismo— que le permitió demostrar resultados como:

Libro I, proposición 29. *Los ángulos correspondientes son iguales.*

Libro I, proposición 32. *Los ángulos de un triángulo suman dos rectos.*

FIG. 3

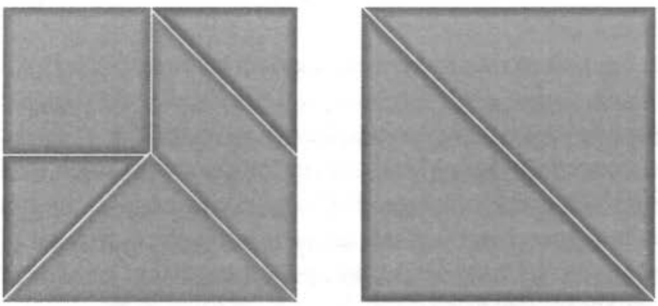
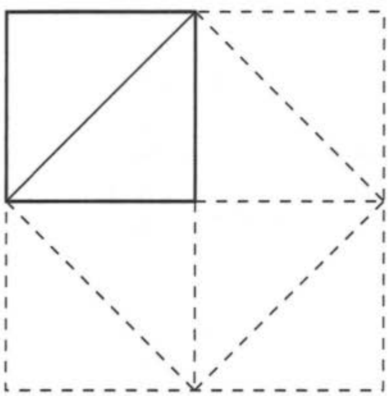


FIG. 4



Libro I, proposición 34. *Segmentos paralelos entre paralelas son iguales.*

El primero y el tercero permiten efectuar una descomposición por el método del tángram generalizado, que consiste en aplicar la metodología tángram pero sin limitarnos a las piezas originales. Para ello se precisan teoremas que establezcan la igualdad de las superficies de tales figuras. Estos teoremas son los siguientes:

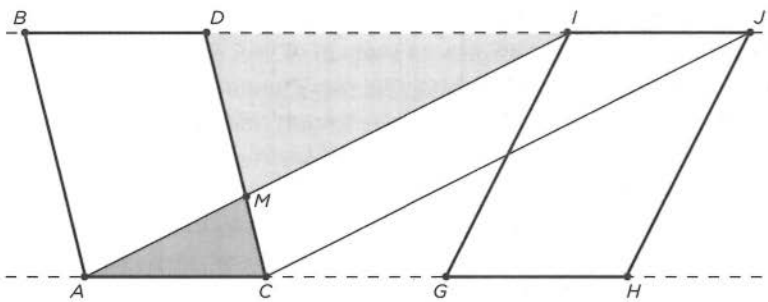
Libro I, proposiciones 35 y 36. *Los paralelogramos con bases iguales [congruas] y contenidos entre las mismas paralelas son iguales.*

Libro I, proposición 37. *Los triángulos con bases iguales [congruas] y contenidos entre las mismas paralelas son iguales.*

La figura 5 es una imagen asociada a las proposiciones 35 y 36 del Libro I.

Euclides afirma que los paralelogramos $\square BC$ y $\square IH$ tienen la misma superficie. En el lenguaje aritmético-algebraico de las escuelas actuales, frente a esta afirmación diríamos que ¡es evidente! Tienen la misma base y la misma altura y la superficie se obtiene multiplicando estas dos cantidades (esta última afirmación, sin embargo, habría que demostrarla). Ahora bien, la geometría griega

FIG. 5



maneja magnitudes —esto es, segmentos rectilíneos— que, a causa de la *inconmensurabilidad*, no tienen longitud. La inconmensurabilidad hace que pueda suceder que uno —o ambos— segmentos no sean medibles (una cuestión que se tratará con más detalle en el capítulo 5). En consecuencia, hay que recurrir a algún tipo de estratagema para demostrar que ambas superficies son iguales. Euclides recurrió a la noción común 1. Si conseguía demostrar que los paralelogramos $\square BC$ y $\square AJ$ —que comparten una misma base— eran iguales y que el segundo era igual al paralelogramo $\square IH$ —con el cual comparte una base—, entonces los paralelogramos $\square BC$ y $\square IH$ también serían iguales.

> «¿Un punto marca el final de una línea o su principio? Quién lo sabe. Nadie.»
>
> — Mo Jing (Mozi) (479-372 a.C.).

Empecemos con la primera cuestión. Euclides analiza las piezas —método del tángram chino— y aplica las nociones comunes 2 y 3. Los triángulos $\triangle BAI$ y $\triangle DCJ$ constan de una pieza blanca y de una pieza común gris claro. Si, de ambos triángulos, quitamos la pieza común —«de iguales quitamos iguales»— resulta, respectivamente, que los cuadriláteros *BAMD* y *IMCJ* son iguales aun cuando no tengan idéntica forma. A estos dos cuadriláteros les añadimos ahora el triángulo común $\triangle AMC$ (gris oscuro). Puesto que, «a iguales hemos añadido iguales», resulta que los paralelogramos $\square BC$ y $\square AJ$ —con base común *AC*— son iguales.

¿Qué diferencia hay entre el caso que acabamos de demostrar y el caso general de los enunciados de las proposiciones 35 y 36 del Libro I? La diferencia radica, como ya hemos apuntado, en que, en este caso, las bases no solo son iguales, sino que son la misma: comparten una base (en el par $\square BC$ y $\square AJ$, el segmento *AC*, y en el par $\square AJ$ y $\square IH$, el segmento *IJ*).

Para la demostración anterior Euclides debió recurrir a la proposición 4 del Libro I (criterio LAL), que establece la igualdad de los $\triangle BAI$ y $\triangle DCJ$. Para ello precisó de ciertas propiedades las cuales dependen del postulado de las paralelas (en particular de

las proposiciones 34 y 29 del Libro I). Una vez establecido este resultado, Euclides pudo en adelante usar el método del tángram con piezas que no se superponen pero que tienen la misma superficie. Esta es la idea del tángram generalizado que Euclides usó con una gran maestría. La proposición 37 del Libro I es un simple corolario de las anteriores, ya que todo se reduce a ver que los triángulos tienen una superficie que vale exactamente la mitad de un paralelogramo (figura 6).

«El cerebro no es un vaso que hay que llenar, sino que es una lámpara que hay que encender.»

— Plutarco.

Euclides, como antes hicieran otros geómetras griegos, iluminó y acrecentó la geometría por *generalización* de resultados simples y evidentes. En el caso que nos ocupa, estableció —sin exponerlo de forma explícita sino usándolo en las demostraciones— que con piezas de forma distinta —paralelogramos o triángulos— podemos computar superficies.

Otro elemento geométrico que permitió a Euclides usar el método del tángram generalizado es el gnomon. El romano Herodoto lo menciona en un sugestivo pasaje del Libro II de su *Historia*:

> Sesostris hizo el reparto de los campos, dando a cada egipcio su suerte cuadrada y medida igual de terreno; providencia por cuyo

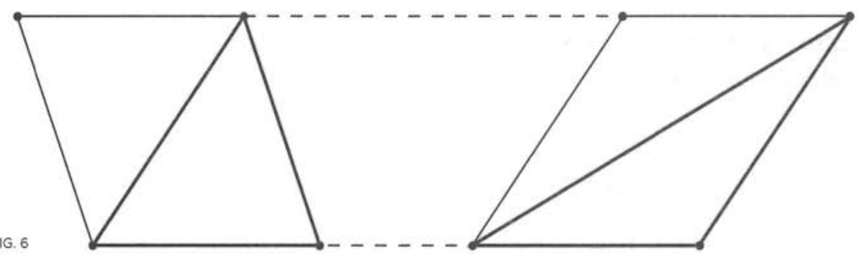
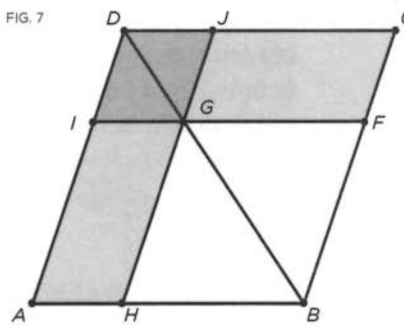


FIG. 6

medio, imponiendo en los campos cierta contribución, logró fijar y arreglar las rentas anuales de la corona. Con este orden de cosas, si sucedía que el río destruyese parte de alguna de dichas suertes, debía su dueño dar cuenta de lo sucedido al rey, el cual, informado del caso, reconocía de nuevo por medio de sus peritos y medía la propiedad, para que, visto lo que había desmerecido, en adelante, contribuyese menos al erario a proporción del terreno que le restaba. Nacida de tales principios en Egipto la geometría, opino que pasaría después a Grecia, conjetura que no es extraña, pues los griegos aprendieron de los babilonios el reloj, el gnomon y el repartimiento civil de las doce horas del día.

FIG. 7



Euclides definió el gnomon en el Libro II, si bien ya en el Libro I había establecido la propiedad que lo hace tan útil. En primer lugar, la definición:

Libro II, definición 2. *En toda superficie de un paralelogramo se llama gnomon uno cualquiera de los paralelogramos situados en torno de la diagonal junto con los dos complementos.*

Y su interesante propiedad:

Libro I, proposición 43. *En toda superficie de un paralelogramo, los complementos de los paralelogramos situados en torno de la diagonal son iguales entre sí.*

Según se muestra en la figura 7, el gnomon —de acuerdo con la definición 2 del Libro II— es la figura gris, formada por cuatro trozos: los dos paralelogramos $\square IH$, $\square GC$ y los dos triángulos $\triangle IGD$, $\triangle JDG$, evidentemente iguales. Basta observar que los trián-

gulos en que la diagonal divide al paralelogramo son iguales y los triángulos blancos y grises oscuro también lo son en virtud de los criterios de igualdad de triangulos; se aplica entonces la noción común 3. Así pues, piezas diferentes —que no se pueden superponer— tienen la misma superficie: ya tenemos adecuadamente establecido el método del tángram generalizado.

LA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

El juego del tángram, por generalización, permitió a Euclides ofrecer una demostración muy elegante —y, a la vez, muy original— del teorema de Pitágoras.

Demostración de Euclides de la proposición 47 del Libro I:

> **Teorema de Pitágoras**. *El cuadrado sobre la hipotenusa BC del triángulo rectángulo $\triangle ABC$ tiene la misma superficie que los cuadrados sobre los catetos AB, AC juntos.*

Como se observa en la figura 8, por el vértice A se traza una perpendicular a la hipotenusa BC y se prolonga hasta que corta al lado opuesto HI del cuadrado $\square BI$. Se obtienen así los dos rectángulos $▭CJ$, $▭BJ$. Hay que probar que el rectángulo $▭CJ$ es igual al cuadrado $\square AD$ y el rectángulo $▭BJ$, al cuadrado $\square AG$. Para ello Euclides construye los triángulos $\triangle ACI$, $\triangle DCB$. Son iguales por el criterio LAL, como se constata con facilidad: tienen dos lados iguales (congruos) y el ángulo que comprenden también (noción común 2). Ahora bien, el triángulo $\triangle ACI$ comparte el lado CI con el rectángulo $▭CJ$ y tiene el vértice A en la misma paralela, AJ, en que el rectángulo $▭CJ$ tiene el lado opuesto KJ al lado CI. Luego, la superficie del rectángulo $▭CJ$ tiene la superficie doble que el triángulo $\triangle ACI$. Análogamente, el cuadrado $\square AD$ tiene una superficie que es dos veces la del triángulo $\triangle DCB$. Por consiguiente, el cuadrado $\square AD$ tiene la misma superficie que el rectángulo $\square IK$, que es la primera igualdad que buscábamos. Por analogía, el cuadrado $\square AG$ tiene la misma superficie que el

rectángulo $\square BJ$, que es la segunda. Finalmente, por la noción común 2 el teorema queda probado.

FIG. 8

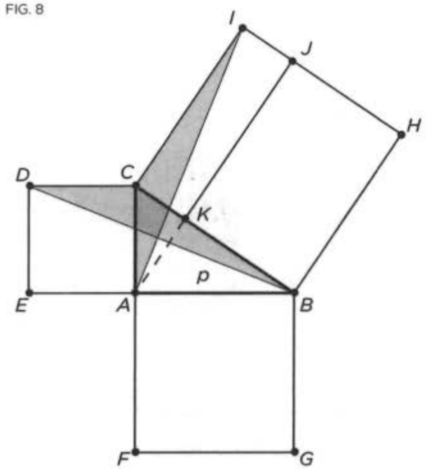
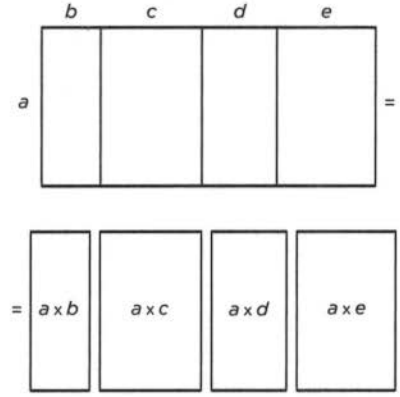


FIG. 9



EL TÁNGRAM GENERALIZADO EN EL LIBRO II

El término «álgebra geométrica» ha sido motivo de discusión y de desacuerdo, pero es útil por su brevedad. Se trata de «establecer» resultados relativos a superficies de rectángulos y cuadrados expresados en el lenguaje numérico del que fueron pioneros figuras como Diofanto de Alejandría o los matemáticos árabes. Por ejemplo, la muy conocida *distibutividad del producto respecto de la suma*; esto es, la expresión algebraica $a \times (b + c + d + \ldots) = (a \times b) + (a \times c) + (a \times d) + \ldots$ expresada en términos geométricos, como corresponde a los *Elementos*, dice:

> **Libro II, proposición 1**. *Si tenemos dos rectas y una de ellas se corta en un número arbitrario de partes, el rectángulo comprendido por las dos rectas es igual a los rectángulos comprendidos por la recta no cortada y cada uno de los segmentos* (figura 9).

De forma análoga, se establecen otras identidades algebraicas como por ejemplo: $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$, $(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$, etc. Nos fijaremos solo en la identidad $(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$, la

FIG. 10

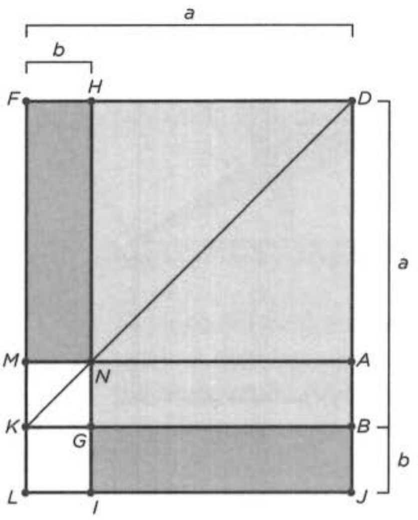
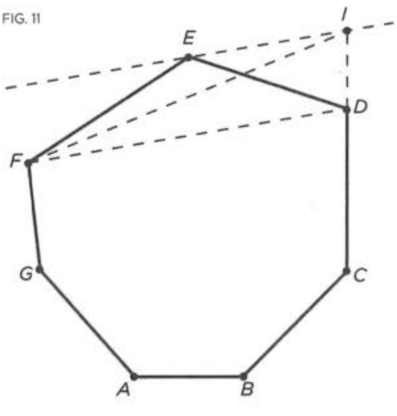


FIG. 11

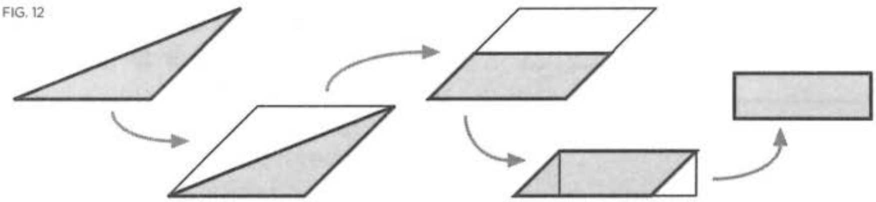


cual, de hecho, no se enuncia explícitamente de esta manera. Nos valdremos para ello de una formulación alternativa de la proposición 5 del Libro II. Partamos de la figura 10.

Vamos a «trocear» el rectángulo ▭*HJ*. En primer lugar, usamos la propiedad del gnomon para establecer que los rectángulos ▭*FN* y ▭*NB* tienen la misma superficie. Además, por construcción, el rectángulo ▭*NB* tiene la misma superficie que el rectángulo ▭*BI* ya que $DB = DF = a$, $BJ = FH = b$, $DJ = a + b$, $JI = DH = a - b$. Entonces tenemos que el rectángulo ▭*HJ* se compone del cuadrado □*KD* (que es a^2) puesto que los rectángulos ▭*GJ* y ▭*FN* son iguales pero sobra el cuadrado □*MG* (que es b^2).

Una segunda aplicación del tángram permite comprobar que las figuras de múltiples lados rectos se pueden transformar en un cuadrado de igual superficie. Para ello, reduciremos paso a paso el número de lados de la figura multilateral (también llamada poligonal) hasta obtener un triángulo. Observemos una figura poligonal rectilínea *ABCDEFG* (figura 11). Unimos dos vértices cualquiera de entre los separados por otro vértice como, por ejemplo, los vértices *D* y *F*. Por el vértice *E* tiramos una paralela. Prolongamos el lado *CD* hasta cortar la paralela en *I*. Unimos *I* con *F*. Los triángulos △*IFD* y △*EFD* tienen la misma superficie (Libro I, proposición 35). Resulta, pues, que las figuras poligonales *ABCDEFG* y

FIG. 12



ABCIFG tienen la misma superficie, pero la segunda tiene un lado menos que la primera. Si repetimos el proceso llegaremos a un triángulo con la misma superficie que la figura rectilínea inicial. En consecuencia, toda figura poligonal rectilínea es *triangulable*.

A continuación, se comprueba que todo triángulo se puede convertir en un rectángulo de la misma superficie, es decir, que todo triángulo es rectangulable. La figura 12 habla por sí sola.

Queda el último paso: Todo rectángulo es cuadrable (Libro II, proposición 14). Supongamos que nos dan un rectángulo $\square AD$ y queremos convertirlo en un cuadrado. Observemos la figura 13. Llevamos el lado *CD* a continuación del lado *AC*. Dividimos el segmento *AB* por la mitad mediante el punto *G*. Con centro en él y radio *GB* tiramos media circunferencia. Levantamos la semicuerda *FC* perpendicular a *AB* en el punto *C*. El segmento *FC* produce un cuadrado de la misma superficie que el rectángulo inicial.

Hasta aquí la construcción, que puede llevarse a cabo con regla y compás en todos sus pasos. Cabe demostrar que *FC* cumple lo que se busca. Si tomamos los segmentos $r\,[=GF=AG=GB]$ y $s\,[=GC]$, veremos que el rectángulo tiene una superficie igual a $(r+s)(r-s)$, cuyo valor es igual a r^2-s^2. Ahora bien, *FC* es un cateto del triángulo rectángulo $\triangle FCG$. Y, por el teorema de Pitágoras, su cuadrado vale r^2-s^2. Por tanto, el rectángulo $\square AD$ es igual al cuadrado *FC*, que es la equivalencia que buscábamos. Euclides procedió de

FIG. 13

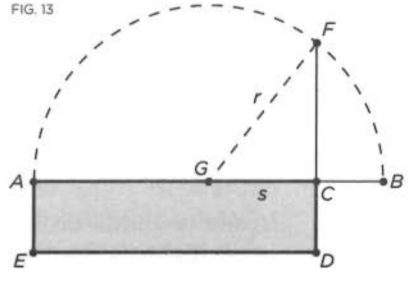


FIG. 14

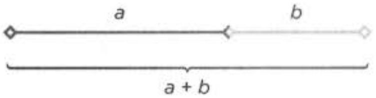
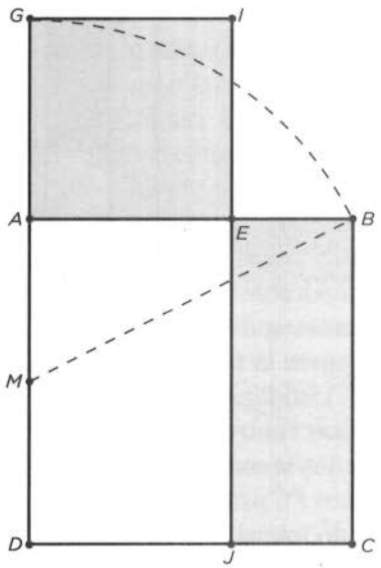


FIG. 15



esta forma usando tángram; nosotros hemos recurrido a la expresión algebraica para simplificar la exposición, pero sin falsearla.

LA RAZÓN ÁUREA

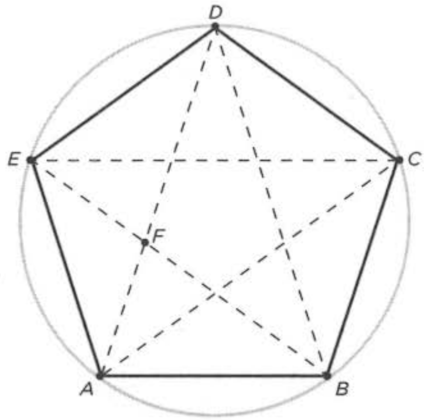
Se conoce como «razón áurea» la que guardan dos segmentos a, b tales que la suma de sus longitudes, $a+b$, guarda con el segmento más largo a, la misma proporción que a guarda con b (figura 14).

Debe su poético nombre a su —solo supuesta— presencia en numerosas construcciones arquitectónicas y otras obras artísticas, a las que aporta, siempre según algunos autores, una gran armonía. También se la conoce con los apelativos de segmento áureo (en cuyo caso está implícito un segmento de mayor tamaño de referencia), razón dorada, número áureo, proporción áurea, divina proporción o, en la terminología propia de Euclides, media y extrema razón. Se denota con la letra griega *phi* (Φ) y tiene como valor:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339887498948482045868343656381177203 09\ldots$$

Se trata de un número irracional, es decir, que no puede ser expresado como fracción de ningún par de números enteros. Desde un punto de vista geométrico, construir un segmento áureo exige dividir un segmento dado AB por un punto E de manera que el cuadrado sobre la parte mayor AE coincida con el rectángulo

LA ESTRELLA PITAGÓRICA



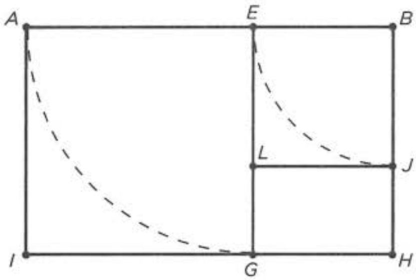
Euclides se sirvió de la razón áurea en un paso intermedio de la construcción del pentágono regular; en concreto, para obtener un triángulo isósceles que tenga ángulos en la base dobles que el ángulo en el vértice. Se trata de una construcción sorprendente que solo se explica en el caso de que Euclides se enfrentara a un pentágono ya construido —y por tanto, «ideal»—, y del análisis de tal figura concluyera que necesitaba del triángulo mencionado; en consecuencia, estamos frente a un nuevo ejemplo de combinación de análisis y síntesis sobre el que llamábamos la atención en el segundo capítulo. En efecto, si se observa la figura del pentágono, se ve que dos diagonales y uno de sus lados forman un triángulo isósceles cuyos ángulos en la base son dobles. Asimismo, dos diagonales —*EB* y *AD* en la figura— se cortan en un punto *F* que divide cada una de dichas diagonales en media y extrema razón. El pentágono regular pudo tener especial relevancia para la escuela pitagórica, que se dice tenía como distintivo la *estrella pentagonal* que se obtiene trazando las diagonales de la figura (líneas discontinuas).

que se obtiene con el segmento menor *EB* y el segmento inicial (Libro II, proposición 11), según se observa en la figura 15.

EL RECTÁNGULO ÁUREO

El segmento áureo permite construir un rectángulo cuyos lados son el segmento inicial *AB* y la parte más larga de la división áurea, *AE*, y que recibe en consecuencia el apelativo de *rectángulo áureo*. En la figura 15 se observa que, en efecto, el punto *E* divide *AB* en media y extrema razón. Este rectángulo tiene la particularidad de

FIG. 16



que puede autorreproducirse mediante el proceso siguiente (figura 16): la parte pequeña *BE* divide, a su vez, a la grande *AE* en media y extrema razón pasando a ser ahora la parte grande en la nueva división (véase el punto *J* que divide el segmento *BH*(=*AE*) en media y extrema razón). El rectángulo *AH* es un rectángulo áureo, *EH* otro, *LH* otro, etc., ad infinítum.

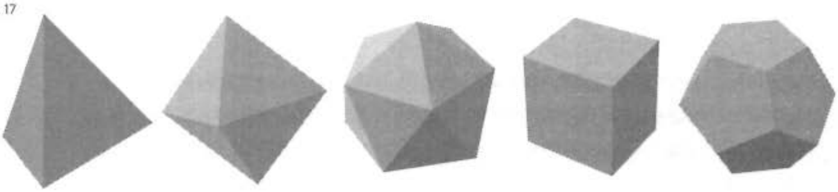
EL RECTÁNGULO ÁUREO Y EL DODECAEDRO

Los *Elementos* concluyen con la «construcción» de los cinco sólidos platónicos y con la demostración de que solo existen estos cinco. Platón, en su *Timeo*, establece la clasificación de los elementos de la naturaleza en base a cinco sólidos (figura 17): el tetraedro es el *fuego*, por su ligereza; el cubo o hexaedro es la *tierra*, por su estabilidad; el octaedro es el *aire*, por su inestabilidad; el icosaedro es el agua, por su fluidez, y el dodecaedro, el elemento del cosmos, la *quinta esencia*, por ser el elemento de los dioses. Al respecto de estas construcciones, Euclides afirma:

Libro XIII, proposición 18. *Afirmo que ninguna otra figura sólida, distinta de las anteriores, se puede construir con figuras equiláteras y equiangulares.*

Los cinco sólidos platónicos. De izquierda a derecha: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro.

FIG. 17



EL RECTÁNGULO ÁUREO EN DOS OBRAS MAESTRAS

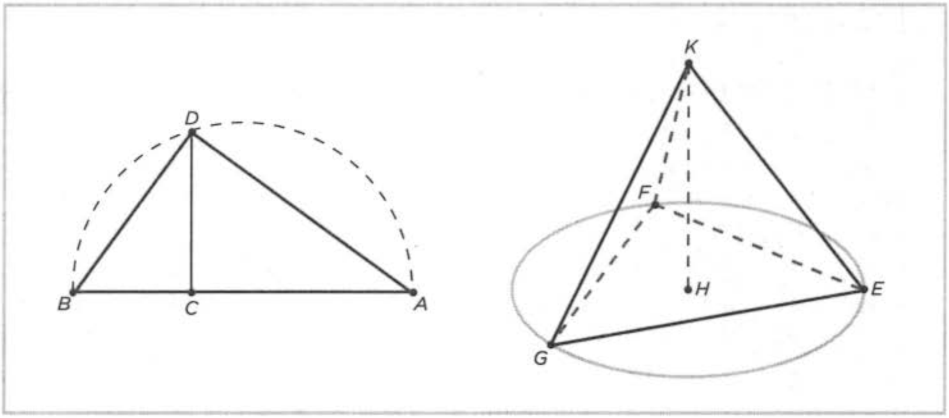
Se afirma en ocasiones que la proporción áurea asoma en numerosas obras de arte. A modo ilustrativo se dan aquí dos ejemplos: el Partenón de Atenas y *Las meninas* de Velázquez. Incluso cuando el arte rompe los estándares de la herencia clásica —en el cubismo de la pintura, por ejemplo—, el rectángulo se mantiene como elemento estructurador del cuadro. El Partenón es uno de los principales templos dóricos que se conservan, y fue construido entre los años 447 y 432 a.C. Sus dimensiones aproximadas son 69,5 m de largo por 30,9 m de ancho; las columnas tienen 10,4 m de altura. Está dedicado a la diosa griega Atenea, a la que los atenienses consideraban su protectora. En cuanto al lienzo de Velázquez, sus medidas son 318 x 276 cm, y fue pintado en 1656. Como puede observarse en las imágenes, las proporciones de muchos elementos clave de ambas obras dibujan varios rectángulos áureos. De todos modos, hay que precisar que, si bien no existe construcción, lo contrario sería demasiado casual.





Demostración. Imaginemos en el papel un punto y circundémoslo de 3, 4 o 5 triángulos equiláteros, 3 o 4 cuadrados y 3 pentágonos. El punto del plano no admite más, si contamos los grados de los ángulos. Luego no puede haber más sólidos regulares que los que provienen de estos casos.

Pero, ¿existen los cinco? La construcción de los tres primeros es relativamente sencilla; la del icosaedro y del dodecaedro, en



cambio, son complejas. Euclides las ofrece y además da la arista en función del diámetro de la esfera circunscrita. Constituyen las proposiciones 13 a 17 del Libro XIII. Todo se reduce a ver cómo se construye el círculo que circunscribe una cara del sólido, una construcción fruto del análisis. Como ejemplo, veamos la construcción de la cara del tetraedro regular (véase la figura).

Dividimos el diámetro AB de la esfera por un punto C de manera que $AC=2\ BC$. Tiramos una perpendicular a AB por C hasta que corte la semicircunferencia ABD en el punto D. Con radio CD trazamos una circunferencia y consideramos el triángulo equilátero inscrito en ella. Se obtienen tres puntos E, F, G. Por el centro H del triángulo $\triangle EFG$ levantamos una perpendicular al plano que lo contiene HK igual a AC. Unimos K con los vértices E, F, G y obtenemos el tetraedro. Nuevamente se observa que para lograr esta construcción previamente se tiene que haber realizado un «análisis» en el sentido expuesto en el recuadro dedicado a la construcción del pentágono regular. Sin dicho análisis es imposible la construcción, puesto que no sabríamos qué hay que hacer.

Cuando se trata del icosaedro y del dodecaedro, sin embargo, no es tan simple. Es por ello que Hipsicles dedicó una parte importante del Libro XIV a rehacer dichas construcciones. Pero la construcción realmente extraordinaria es la del icosaedro que ofrece el italiano Luca Pacioli (1445-1514 o 1517) en *La divina propor-*



FOTO SUPERIOR: **El fraile franciscano y matemático italiano Luca Pacioli en un cuadro de 1495 desarrollando uno de los problemas expuestos en los *Elementos* de Euclides. Museo e Gallerie di Capodimonte, Nápoles, Italia.**



FOTO INFERIOR IZQUIERDA: **Portada de la primera edición en inglés de los *Elementos* de Euclides, publicada en 1570 por Henry Billingsley.**

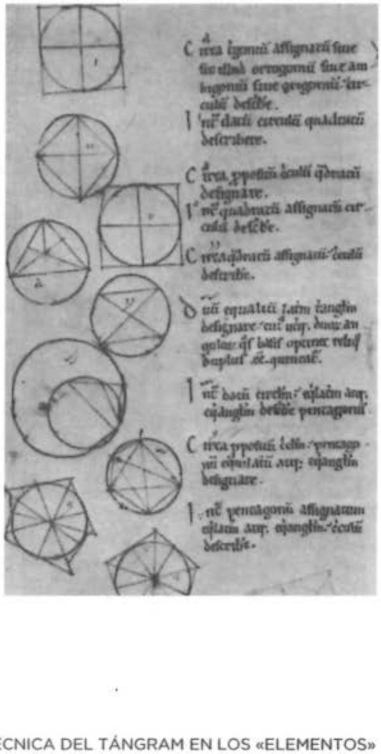
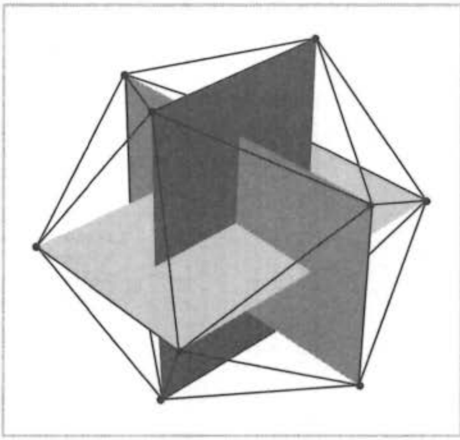


FOTO INFERIOR DERECHA: **Copia en latín del siglo XII del Libro IV de los *Elementos* de Euclides.**



ción (1494), el texto que dio a la media y extrema razón uno de sus nombres más sonoros, y cuya fama se debe tanto a sus cualidades científicas como a unas magníficas ilustraciones de poliedros obra del mismísimo Leonardo da Vinci. Con su obra maestra, *Summa di arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalità*, escrita con el objetivo principal de racionalizar las prácticas contables de la época, Pacioli «cerró» la matemática de los siglos XIII y XIV y dio paso a la era moderna del álgebra. En 1507, por cierto, editó una traducción latina de los *Elementos*. Como se observa en la figura, Pacioli cortó perpendicularmente dos a dos por su paralela media, tres rectángulos áureos iguales. Luego le bastó con unir los vértices contiguos. Para construir el dodecaedro, unió los centros de las caras del icosaedro. Un ejercicio sublime de claridad conceptual.

CAPÍTULO 5

La teoría de la proporción y el método de exhaución

Uno de los éxitos matemáticos más notables de entre los salidos de la Academia platónica es la teoría de la proporción, atribuida a uno de los grandes matemáticos de la Antigüedad, Eudoxo de Cnido. Gracias a ella, Euclides fue más allá de las rectas y las circunferencias y pudo abordar los volúmenes. Otra de las grandes creaciones de la matemática clásica, el método de la exhaución, le permitió, entre otros logros, solucionar un problema heredado del antiguo Egipto: el volumen de la pirámide.

Ya se ha expuesto que el Libro V de los *Elementos* es independiente de los cuatro anteriores si bien, una vez establecida la teoría de la proporción de magnitudes, precisa de ellos para poder aplicar la teoría general a la geometría del triángulo y del círculo e incluso a la aritmética. Esta metodología se atribuye casi unánimemente a Eudoxo de Cnido.

EL CONCEPTO DE MAGNITUD

La primera dificultad —análoga pero más compleja que la que presentaba el concepto de recta— radica en la noción misma de *magnitud*, que Euclides usó pero de la cual jamás estableció una definición. Es curioso observar que Arquímedes en cambio lo evitaba y solo se refería a «rectas, superficies y sólidos». La carencia de esta definición condujo a una discusión filosófica con importantes implicaciones matemáticas. El interrogante alrededor del cual se produjo dicha discusión es: ¿son infinitamente divisibles las magnitudes? Fue Zenón de Elea quien dejó una huella más profunda sobre dicha cuestión al plantear sus famosas *aporías* o *paradojas*.

Zenón dio forma propia a la cuestión relativa a la magnitud, y se preguntó, con respecto al tiempo y al espacio: ¿son infinita-

mente indivisibles o se componen, respectivamente, de instantes y de intervalos indivisibles? Ambas situaciones son, para la mentalidad griega, inaceptables: la primera conlleva la aceptación del infinito en acto, algo que, en el siglo IV a.C., como ya se ha tratado, sería rechazado de forma totalmente explícita y tajante por Aristóteles. La segunda conlleva a la paradoja siguiente: ¿cómo es posible que uniendo «instantes» o «intervalos indivisibles» —carentes, respectivamente, de tiempo o de espacio, es decir, nulos— se logre, respectivamente, un intervalo temporal o espacial, no nulos? Zenón fue todavía más lejos y planteó cuatro paradojas, recogidas en la *Física* de Aristóteles: dos de ellas surgen al considerar que el tiempo es atómico, compuesto de instantes sin tiempo; y las otras dos, por el contrario, en el supuesto de que la magnitud —ya sea el tiempo o el recorrido— sea infinitamente divisible. Vamos a reproducir dos de ellas, una de cada tipo.

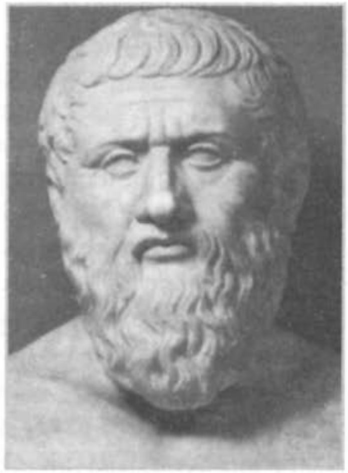
«Me encuentro constantemente con personas que dudan, generalmente sin razón alguna, de su capacidad potencial como matemáticos. La primera prueba es si comprendes algo de geometría. Que no gusten o encuentren dificultades en otros temas matemáticos no importa.»

— JOHN E. LITTLEWOOD.

EL APORISMO DE LA FLECHA

Pensemos en una flecha disparada por el arco que tensara Ulises para mostrar que efectivamente era el esposo de Penélope, que había regresado a su hogar y que se proponía defenderlo del ultraje de los pretendientes. En un «instante» de su recorrido la flecha «no se mueve», pues de moverse un cierto intervalo de espacio, precisaría de «medio instante» para moverse la mitad de dicho intervalo espacial. Pero dicha «mitad» no existe, puesto que se está suponiendo que el «instante» es el intervalo de tiempo menor posible. Luego, efectivamente, la flecha no se mueve. Pero, «si no

ZENÓN DE ELEA



Zenón nació en Elea, hoy en la Campania italiana, el 490 a.C. Es uno de los filósofos llamados *presocráticos*. Fue discípulo de Parménides (570 a.C.-475 a.C.), con el cual, a mediados del siglo V a.C., se trasladó a Atenas donde conoció, según el testimonio de Platón, al entonces joven Sócrates. Murió el 430 a.C. al intentar liberar su patria del tirano que la gobernaba. Según la leyenda, se cortó la lengua antes de revelar los nombres de los conjurados. De *Sobre la naturaleza* —que defiende las tesis de Parménides— se conservan cinco fragmentos que, gracias al comentario que Simplicio (490-560) hizo a la *Física* de Aristóteles, se consideran auténticos. Se trata de un texto compuesto de argumentos *(logoi)*: en ellos reducía al absurdo las hipótesis de sus oponentes, con lo que quedaban establecidas sus tesis por rechazo de aquellas hipótesis (una suerte de reducción al absurdo pero aplicado al ámbito filosófico). Por sus aporías se le puede considerar el padre del razonamiento paradójico: nunca trataba de demostrar directamente las tesis de su maestro; utilizaba la sutileza de refutar al oponente llegando a conclusiones inaceptables en sí mismas. Su filosofía sostiene que solo existe el «ser» y que este es único e inmóvil. La pluralidad y el movimiento llevan a la inconsistencia conceptual. Gracias a Aristóteles conocemos sus cuatro paradojas: de la flecha, de la tortuga, de la carrera y del estadio.

se mueve en instante alguno del recorrido», ¿cómo podemos decir que se ha movido del arco al pecho de Antínoo, el primero de los pretendientes alcanzado por Ulises?

Se podría argumentar que, en un instante de tiempo, la flecha se mueve un espacio indivisible: un espacio sin espacio. Pero ello nos retrotraería al hecho ya expresado con anterioridad: ¿cómo se consigue un espacio añadiendo «espacios indivisibles» (nulos, carentes de espacio)?

LA APORÍA DE AQUILES Y LA TORTUGA

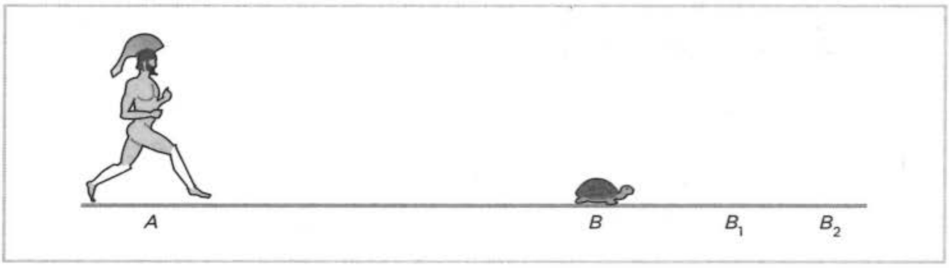
Es imposible que Aquiles, el de los pies ligeros, lograra alcanzar a la lenta tortuga si esta le llevaba una cierta ventaja. Aquiles partía de un punto A con la intención de alcanzar una tortuga que se hallaba adelantada al punto B (véase la figura). Por muy rápido que se desplazara Aquiles —salvo que lo hiciera a velocidad infinita, algo que no es admisible—, cuando llegara al punto B, la tortuga, por lenta que fuera, se habría desplazado al punto B_1; entre los puntos B y B_1 hay un cierto espacio —puesto que suponemos que el espacio es infinitamente divisible, lo cual significa que carece de infinitésimos y, por consiguiente, entre dos puntos, siempre hay un cierto espacio—. Aquiles precisaba de un cierto tiempo para recorrer el intervalo BB_1 y, entre tanto, la tortuga se habría desplazado al punto B_2 y así ad infinítum. En un tiempo finito, Aquiles jamás alcanzaría a la tortuga.

Había que superar pues esta dualidad si se quería fundamentar, con un cierto rigor, la geometría. ¿Las magnitudes geométricas —líneas, superficies y sólidos— son infinitamente divisibles o atómicas? Euclides, de forma implícita, en sus *Elementos*, y Arquímedes, en forma de postulado, en *De la esfera y el cilindro*, imponen:

> Las magnitudes son infinitamente divisibles y, por consiguiente, carecen de átomos.

Así, eligiendo entre dos situaciones posibles igualmente aceptables —o inaceptables— salvaban el escollo que plantea el hecho

Aporía de Aquiles y la tortuga.



de carecer de una definición precisa de magnitud. Es muy posible que al geómetra no le importe tanto «lo que son» las magnitudes como «cómo debe manejarlas». Ello, sin embargo, no excluye que una falta de claridad filosófica —de cualquier tipo— pueda llevar a situaciones paradójicas quizá inicialmente imprevistas. ¿Dan cobijo los postulados de los *Elementos* a estos entes matemáticos de nueva creación? ¿Afecta ello al espíritu de orden y rigor que es uno de sus objetivos?

LAS MAGNITUDES INCOMENSURABLES

Ya en la escuela pitagórica se planteó lo que algunos autores han considerado la primera crisis de fundamentos de la matemática. Hasta ese momento se había supuesto que «dos segmentos siempre son conmensurables». Es decir, dados dos segmentos AB y CD siempre es posible hallar un segmento UV «común» a ambos segmentos por lo que a la medida se refiere; o, lo que es lo mismo, siempre existe un segmento UV que mide exactamente ambos segmentos. Así, pues: $AB = m \times UV$ y $CD = n \times UV$. Lo podemos ex-

INDEPENDENCIA DE LA UNIDAD DE MEDIDA

Si, por ejemplo, en vez de UV elegimos $U_1V_1 = k \times UV = UV + \overset{k}{\cdots} + UV$, entonces

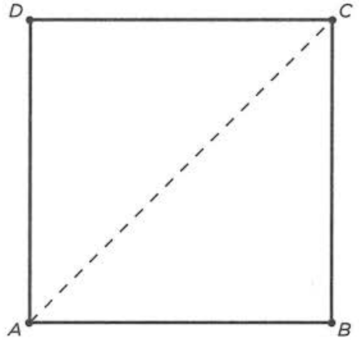
$$AB = \frac{m}{k} \times U_1V_1 \text{ y } CD = \frac{n}{k} \times U_1V_1,$$

o, lo que es lo mismo, $k \times AB = m \times U_1V_1$, $k \times CD = n \times U_1V_1$. Su relación es $\frac{m}{n}$, ya que, por la proposición 3 del Libro V,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{k \times AB}{k \times CD} = \frac{m \times U_1V_1}{n \times U_1V_1} = \frac{m}{n}.$$

Si se recurre a la razón entre magnitudes, no hace falta disponer de una unidad de medida para cada «tipo» de magnitud.

FIG. 1



presar diciendo que hay «una relación» entre AB y CD, su «razón», que expresaremos como $\frac{m}{n}$ o $m:n$.

El concepto de *razón* es muy importante porque permite «eludir» el segmento de medida concreto UV. Lo mismo da usar metros que centímetros o kilómetros: la razón —la relación en la que se hallan las longitudes— no varía si cambiamos la unidad de referencia de la distancia.

Pero no siempre podemos establecer una razón numérica entre magnitudes; no es posible reducirlo todo a un cómputo numérico (con números naturales; es decir, los enteros positivos). Así, por el teorema de Pitágoras, se puede computar la «diagonal AC de un cuadrado de lado arbitrario AB» (figura 1). Ya que $AC = AB$:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = AB^2 + AB^2 = 2 \times AB^2.$$

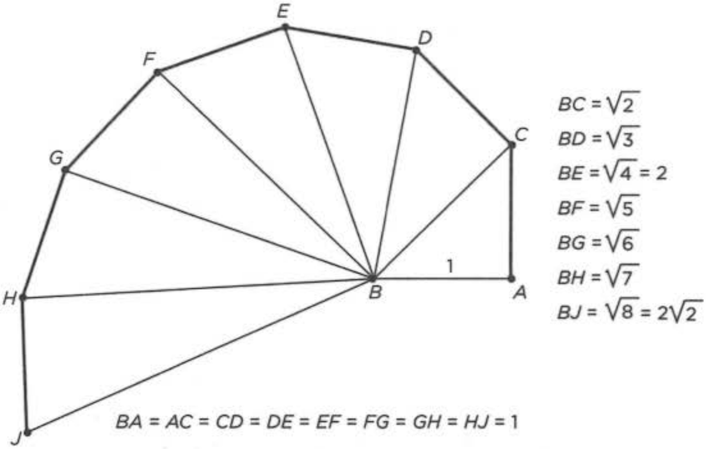
Supongamos que AB y AC fuesen conmensurables. Tendríamos: $AB = m \times UV$, $AC = n \times UV$. Por lo tanto, $AB^2 = m^2 \times UV^2$, $AC^2 = n^2 \times UV^2$. Luego, $n^2 \times UV^2 = 2 \times m^2 \times UV^2$ y, por consiguiente, $n^2 = 2 \times m^2$, lo cual no es posible. La diagonal de un cuadrado es inconmensurable.

Lo expuesto hasta aquí (que no aparece explícitamente en los *Elementos* de Euclides pero que permite una lectura más comprensible de sus logros y de sus limitaciones) fue una tragedia para la escuela pitagórica, que sostenía:

El número [natural] es la razón de todo.

Es decir, según los pitagóricos, todo puede medirse mediante números naturales; o, dicho de otro modo, todas las magnitudes (de una misma especie) son conmensurables entre sí. Pero, de acuerdo con el ejemplo expuesto, «existen» segmentos que no

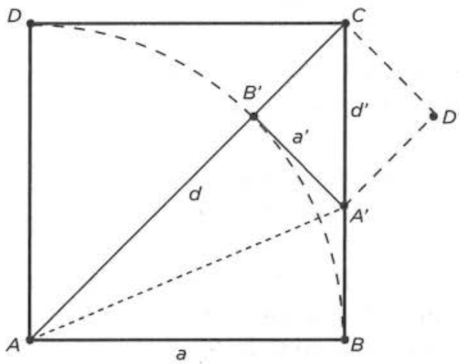
FIG. 2



admiten medida común alguna. Y, más grave aún, Teodoro de Cirene estableció un método para construir geométricamente una infinidad de segmentos inconmensurables. Es la conocida como «espiral de Teodoro», y se construye a partir de un segmento de valor unidad, que, en un proceso iterativo, se mantiene como cateto corto de sucesivos triángulos rectángulos que comparten un mismo vértice (figura 2).

Los triángulos rectángulos que conforman la espiral tienen una hipotenusa que va adoptando los valores raíz de dos, de tres, de cuatro, de cinco, de seis, de siete y de ocho (aunque el tercer valor de la serie sí es un número natural, el dos). La mayor parte de estos valores es un número irracional, es decir, no expresable como fracción (razón) de dos números naturales. Hoy diríamos, en un lenguaje mucho más numérico, que cualquier *número real* —un concepto ajeno a la matemática griega— de la forma $\sqrt{n}$, con n natural que no sea un cuadrado perfecto (es decir, el cuadrado sin decimales de otro número entero), es un número irracional. Euclides dedicó el Libro X al estudio de las líneas inconmensurables.

MÉTODO ITERATIVO PARA FABRICAR LADOS Y DIAGONALES DE CUADRADOS



Es posible ofrecer una demostración de la incomensurabilidad de la diagonal del cuadrado —también por reducción al absurdo— completamente geométrica. Se trata de una prueba de índole iterativa: a partir de un caso particular, se generan otros casos más pequeños que mantienen la misma razón. Consideremos un cuadrado □*ABCD* de lado $a=AB$ y diagonal $d=AC$. Llevemos el lado sobre la diagonal. Obtenemos una recta *AB'*. Tiremos la tangente al arco de circunferencia *BB'* en el punto *B'*; corta el lado *BC* en *A'*. Unimos *B'* y *A'* y completamos el triángulo rectángulo isósceles △*CB'A'* para conseguir el cuadrado □*CB'A'D'*. Hemos construido un nuevo cuadrado cuyos lado y diagonal son, respectivamente, $A'B'=AC-AB'$ $[a'=d-a]$ y $A'C=BC-A'B$ $[d'=a-a']$, en el cual obviamente $AC>A'C$ y $AB>B'C$. Está claro que si *u* mide, a la vez, a $a=AB$ y $d=AC$, medirá su diferencia *a'* y, luego, la diferencia *d'*. Podemos iterar e iterar el proceso y obtener las parejas $\langle a,d\rangle > \langle a',d'\rangle > \langle a'',d''\rangle > \langle a''',d'''\rangle > \cdots$ de lados y diagonales de cuadrados conmensurables. Llegará un momento en que la diagonal o el lado serán menores que la medida *u* que los mide. Imposible.

EL CONCEPTO DE «RAZÓN»

En esta situación —la de la inconmensurabilidad— cabe preguntarse si es posible considerar «la razón» de las magnitudes inconmensurables. Al afrontar esta cuestión surge la figura del genial Eudoxo de Cnido, padre de las ideas contenidas en los Libros V y VI.

Comenzaremos el análisis del Libro V examinando sus cuatro primeras definiciones:

Definición 1. *Una magnitud es parte de otra mayor cuando la mide.*

Definición 2. *Una magnitud es múltiplo de otra menor cuando esta la mide.*

Definición 3. *Razón es una relación cualquiera entre dos magnitudes homogéneas respecto de su cantidad.*

Definición 4. *Se dice que dos magnitudes tienen razón cuando un múltiplo de una de ellas logra superar a la otra.*

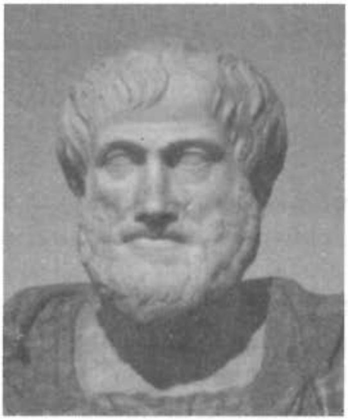
En los conceptos de «parte» y «múltiplo» se hallan involucrados los conceptos de multiplicidad y de conmensurabilidad o divisibilidad. Un *múltiplo* es la repetición de una misma magnitud un cierto número de veces; así, si la magnitud es A y m es un número natural arbitrario, se tiene el múltiplo $m \times A$. Esta magnitud es equivalente a la suma de m copias de la magnitud A. Un *divisor* o *parte* D de una magnitud A es una magnitud de la «misma especie» que A tal que A es un múltiplo de D; es decir, tal que existe un número natural bien determinado m tal que $A = m \times D$. Estos conceptos presuponen que sabemos cuándo una magnitud «es menor, igual o mayor que otra» lo cual, como veremos, es esencial.

«Zenón y Eudoxo son representantes de dos escuelas vigorosas y opuestas del pensamiento matemático [...]: la crítica destructiva y la crítica constructiva. La mente de ambos poseía un espíritu crítico [...] penetrante.»

— E.T. Bell, *Los grandes matemáticos*.

Existen objetos que cumplen la definición —lo que a su vez da sentido a esta última puesto que, en caso contrario, no definiría nada y sería, por tanto, inútil; se trataría, en realidad, de una propiedad que habría que establecer por medio de un postulado o de una proposición—, pero también hay otros que no la cum-

EUDOXO DE CNIDO



Matemático y astrónomo griego, Eudoxo (ca. 408-ca. 347 a.C.), hijo de Esquines y discípulo de Platón, nació y murió en Cnido. Su familia estaba compuesta por médicos y por su influencia realizó los estudios de medicina, profesión que ejerció durante algunos años en Grecia. Cuando tenía veintitrés años partió para Atenas e ingresó en la Academia de Platón, donde estudió filosofía. Años después conoció los estudios astronómicos que se estaban llevando a cabo en Egipto y, entusiasmado por el tema, organizó su traslado a la ciudad de Heliópolis bajo el patrocinio y recomendación del rey Ageliseo, por lo que tuvo acceso a las observaciones y a las teorías de los sacerdotes de esa ciudad. De regreso a Grecia fundó una escuela de filosofía, matemáticas y astronomía. Más tarde escribió su primera obra, los *Fenómenos*, en la que se describe la salida y el ocaso de los astros. Su geometría —con la teoría de las proporciones y el método de exhaución— influyó en gran manera a Euclides. La primera fue la solución mas antigua a los números irracionales; el segundo le permitió abordar el problema del cálculo de áreas y volúmenes tales como los de la superficie del círculo —es proporcional al cuadrado de

plen. La cuestión que se plantea es la siguiente: ¿Hay en los *Elementos* pares de magnitudes que no tengan razón? Porque «imponer» que «todas las magnitudes, dos a dos, tienen razón» es algo que una definición no puede —ni debe— hacer. Arquímedes no cayó en la misma trampa, y en el axioma V de *De la esfera y el cilindro* se lee:

> *Dadas dos líneas, dos superficies o dos sólidos desiguales, si el exceso de una de ellas sobre la otra se añade a sí mismo un cierto número de veces, se logra superar una u otra de las que se comparan entre sí.*

los diámetros— y del volumen de la pirámide —vale un tercio del prisma de la misma base y altura—. Las definiciones 3 y 4 son muy interesantes. En la tercera —la de «razón»— la expresión «una relación cualquiera» carece de sentido: ¿qué es «una relación cualquiera»? Además, introduce el concepto «respecto de su cantidad» que, en los casos de inconmensurabilidad, no existe. La cuarta requiere un análisis más cuidadoso:

> *Dos magnitudes tienen razón cuando un múltiplo de una de ellas logra superar a la otra.*

La definición establece en qué condiciones dos magnitudes «tienen razón»; si no cumplen las especificaciones, «no tendrán razón». Comparemos la definición anterior con las siguientes:

Objeto	Definición
Dos rectas son *paralelas*	si prolongadas indefinidamente no se cortan.
Una recta es *perpendicular* a otra	si al cortarla lo hace según ángulos rectos.
Dos magnitudes *tienen razón*	si un múltiplo de una de ellas supera a la otra.
Un número es *primo*	si solo admite la unidad como parte.
Dos números son *primos entre sí*	si la única parte común es la unidad.

EL CONCEPTO DE «PROPORCIÓN»

Pero, en realidad, al matemático no le preocupa tanto lo ontológico (¿qué es?) como lo metodológico (¿cómo funciona?). De modo que lo que le interesa al matemático es saber si dos razones son iguales o si una supera a la otra, aun cuando no tenga muy claro qué es una razón. Y este es precisamente el contenido de las definiciones 5 a 7:

> **Definición 5.** *Se dice que la razón de una primera magnitud sobre una segunda es la misma que la de una tercera*

sobre una cuarta cuando, tomando un mismo múltiplo de la primera y de la tercera y un mismo múltiplo de la segunda y de la cuarta, el múltiplo de la primera es menor, igual o mayor que el de la segunda si el de la tercera es menor, igual o mayor que el de la cuarta.

Definición 6. *Las magnitudes que tienen la misma razón se llaman proporcionales.*

Definición 7. *Si entre las magnitudes igualmente multiplicadas el múltiplo de la primera supera al de la segunda pero en cambio el de la tercera no supera al de la cuarta, se dice que la razón de la primera a la segunda es mayor que la razón de la tercera a la cuarta.*

Sean A, B dos magnitudes de una misma especie y Γ, Δ, otras dos (nunca se define qué se entiende por la expresión «de una misma especie», pero queda claro que dos superficies, dos números, dos sólidos, etc., lo son; y en cambio una línea, un número, un sólido, etc., no lo son). Cada par tiene razón, que escribiremos como:

$$\frac{A}{B} \text{ y } \frac{\Gamma}{\Delta}.$$

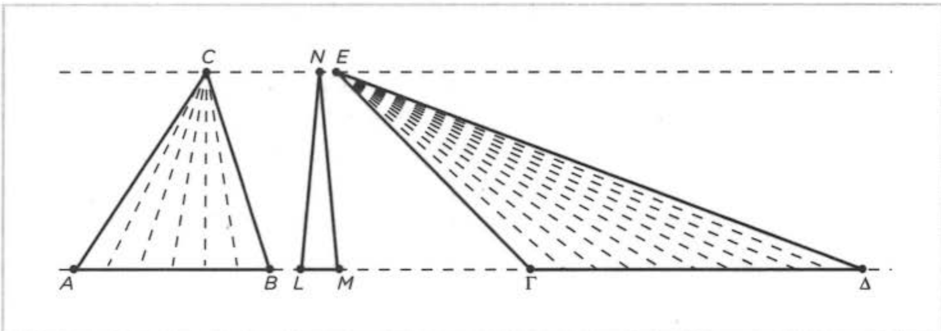
La cuestión es: ¿cuándo podemos decir que

$$\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta} \text{ y cuándo que } \frac{A}{B} > \frac{\Gamma}{\Delta}?$$

Consideramos ahora sendos múltiplos —arbitrario— m de A, Γ y n de B, Δ; $m \times A$, $n \times B$ son magnitudes de la misma especie y, por consiguiente, se pueden comparar; lo mismo ocurre con $m \times \Gamma$, $n \times \Delta$.

Entonces si, cualesquiera que sean los múltiplos m y n, cada vez que se tiene

$$m \times A \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} n \times B,$$



se tiene respectivamente

$$m \times \Gamma \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} n \times \Delta,$$

decimos que $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$.

En cambio, si hay un par de múltiplos m y n para los cuales $m \times A > n \times B$ pero, en cambio, $m \times \Gamma < n \times \Delta$, entonces

$$\frac{A}{B} > \frac{\Gamma}{\Delta}.$$

¿Por qué precisa Euclides de una definición tan compleja? A causa de la inconmensurabilidad. Para entenderlo, demostraremos una misma proposición en dos casos distintos: uno en el que los segmentos sean inconmensurables y otro en el que no.

Libro VI, proposición 1. *Los triángulos y paralelogramos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.*

Veamos la demostración en el caso en que se da la conmensurabilidad. Si las bases de ambos triángulos fuesen conmensurables, podríamos usar la medida común para descomponer uno y otro en triángulos de la misma superficie por el método del tángram (véase la figura).

Si AB y $\Gamma\Delta$ son las bases de dos triángulos que se hallan entre las mismas paralelas y son conmensurables, existe una medida LM común que divide la base AB en m partes, y la $\Gamma\Delta$, en n. Si unimos los puntos que estas partes determinan en la base con los vértices respectivos C y E tendremos, respectivamente, m, n, triángulos iguales en superficie al triángulo $\triangle LMN$, en donde N es un punto cualquiera de la paralela CE a la recta A. Luego, $\triangle ABC = m \times (\triangle LMN)$, $\triangle \Delta\Gamma E = m \times (\triangle LMN)$. Por consiguiente,

$$\frac{AB}{\Delta\Gamma} = \frac{m \times LM}{n \times LM} = \frac{m \times (\triangle LMN)}{n \times (\triangle LMN)} = \frac{\triangle ABC}{\triangle \Delta\Gamma E}.$$

Pero, como hemos visto, cuando AB y $\Gamma\Delta$ son arbitrarios, no podemos saber si son conmensurables. De hecho, todo segmento tiene una infinidad de segmentos que le son inconmensurables muy superior a la infinidad de los segmentos que le son conmensurables. La demostración anterior no es, pues, general; de hecho, es muy particular.

Veamos la demostración en el caso general, esto es, en el que se da la incomensurabilidad. Se precisa de otra demostra-

FIG. 3

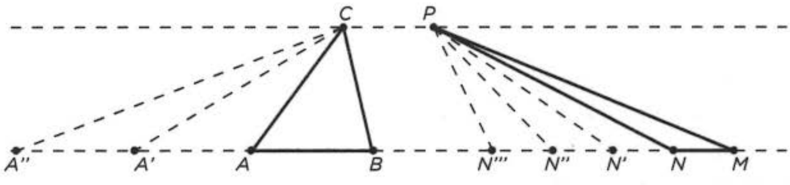
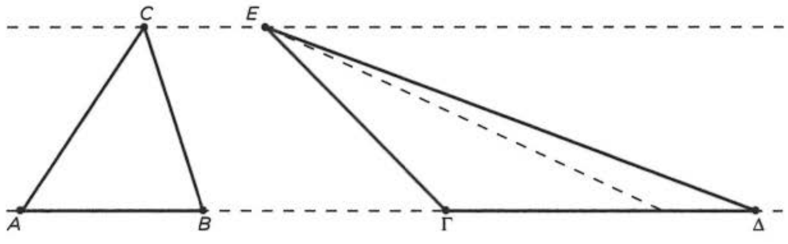


FIG. 4



ción, que descansa en la idea de que, si no se puede hacer tángram por dentro, ¿por qué no hacerlo por fuera? En vez de buscar un triángulo común que se pueda colocar «dentro» de cada uno de los triángulos dados, hagamos múltiplos de cada una de las bases de los triángulos y unamos los puntos que se vayan determinando con el vértice según la figura 3. Se obtienen así dos triángulos que son los múltiplos m y n de los triángulos iniciales: $\triangle A''CB = m \times (\triangle ACB)$, $\triangle N'''PM = n \times (\triangle NPM)$.

«No se debe dar crédito alguno a las previsiones de la vida de un ciudadano hechas a partir de los horóscopos basados en la fecha de su nacimiento, puesto que las influencias de los astros son tan complicadas de calcular que no existe nadie en la faz de la tierra capaz de hacerlo.»

— Eudoxo.

Llegados a este punto, todo depende de saber si, de dos triángulos entre paralelas (es decir, de la misma altura), tiene mayor superficie el que tiene mayor base. La respuesta es evidentemente afirmativa (figura 4).

La base AB es menor que la base ΓΔ. Podemos, pues, llevarla dentro de ΓΔ (un uso intuitivo del concepto «ser menor, ser mayor» —lo «mayor contiene un ejemplar congruo con lo menor»— que jamás se explicita en los *Elementos* pero que se usa siempre que se requiere) y construir un triángulo igual al triángulo $\triangle ACB$ dentro del triángulo $\triangle \Gamma E \Delta$. Luego, es mayor el triángulo que tiene mayor base. Por consiguiente, si

$$m \times AB \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} n \times \Gamma\Delta,$$

entonces

$$m \times (\triangle ACB) \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} n \times (\triangle \Gamma E\Delta).$$

Ahora la definición de Eudoxo se aplica perfectamente y se tiene que

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta}=\frac{\triangle ACB}{\triangle \Gamma E\Delta},$$

como queríamos demostrar.

En el ejemplo anterior se ha establecido la igualdad de razones entre pares de magnitudes de especies distintas: de rectas, la primera; de superficies, la segunda. De ahí la necesidad de la precisión de la definición 5 del Libro V. A partir de estas definiciones, Euclides disponía de una herramienta muy útil para dar resultados concretos de geometría de las rectas y las figuras poligonales rectilíneas. Estos resultados constituyen el grueso del Libro VI en el que ofrece, entre otras, las proposiciones mostradas en la tabla. He ahí la enjundia geométrica de la teoría de la proporción.

Aplicaciones de la teoría de la proporción a la geometría		
Proposición	**Nombre**	**Enunciado**
2	Teorema de Tales. Para lados	*Si se traza una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará a los otros dos proporcionalmente.*
19	Para superficies	*Dos triángulos semejantes son entre sí como las razones duplicadas de los lados.*
5, 6 y 7	Criterios de semejanza de triángulos	*El criterio de proporcionalidad de los tres lados; y el de dos y de igualdad de un ángulo.*
11, 13	Tercera y media proporcional (teorema de la altura de los triángulos rectángulos)	*Se pueden construir dichos segmentos a partir de dos dados.*
12	Cuarta proporcional	*Se puede construir dicho segmento a partir de tres dados.*
8, corolario	Teoremas del cateto y de Pitágoras	*La altura de un triángulo rectángulo lo divide en dos triángulos rectángulos semejantes al inicial.*

EL MÉTODO DE EXHAUCIÓN

La teoría de la proporción se convierte en una herramienta matemática de una potencia enorme —e insospechada, de ahí el genio de Eudoxo—cuando se aplica a la determinación por comparación de áreas y volúmenes. En este caso, el «método del tángram debe llevarse al infinito», algo imposible por la limitación de Aristóteles. Por ello se debe recurrir a la «doble reducción al absurdo». Este proceso se conocería, a partir del siglo XVII, como *método de exhaución*. Euclides lo aplicó para establecer las siguientes proposiciones:

Libro XII, proposición 2. *Dos círculos son entre sí como los cuadrados de los diámetros:*

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

Libro XII, proposición 7. *Una pirámide es una tercera parte del prisma que la circunscrible:*

$$\frac{P_1}{\Pi_1} = \frac{1}{3}.$$

Libro XII, proposición 18. *Las esferas son como los cubos de los diámetros:*

$$\frac{E_1}{E_1} = \frac{d_1^3}{d_2^3}.$$

Sin embargo, quien extrajo todo su potencial a este método no fue otro que Arquímedes, sin duda alguna el matemático más importante de la Antigüedad.

Euclides da la siguiente definición del método de exhaución:

Libro X, proposición 1. *Dadas dos magnitudes [de la misma especie] desiguales, si de la mayor se quita una magnitud mayor que su mitad y de lo queda una magnitud mayor que su mitad y se repite el proceso continuamente,*

LA CUADRATURA DE LA PARÁBOLA DE ARQUÍMEDES

Vamos a examinar cómo aplicó Arquímedes el método de exhaución a la cuadratura de la parábola. En ciertos aspectos, su tratamiento se asemeja a la cuadratura del círculo del propio Euclides. La idea de fondo es la de «rellenar» el área de la parábola con triángulos inscritos, cuyas áreas se conocen, y sumarlas. Dice Arquímedes:

> **Cuadratura de la parábola.** *La superficie de un segmento de parábola es al triángulo inscrito como cuatro es a tres.*

En el segmento de parábola *ADCEBA* consideramos el triángulo inscrito $\triangle ACB$, donde el punto *C* es el punto de la parábola por el cual la tangente a la parábola es paralela a la cuerda *AB*. En estas condiciones Arquímedes afirmaba que la superficie *a*(*ADCEBA*) es igual a cuatro tercios de la superficie del triángulo $T = \triangle ACB$. Es decir,

$$a(ADCEBA) = \frac{4}{3} \times a(\triangle ABC) = \frac{4}{3} \times T.$$

Resta ahora «rellenar» con triángulos los segmentos parabólicos sucesivos $T_1 = \triangle ADC$, $T_2 = \triangle BEC$; luego los triángulos inscribibles en *ADA*, *DCD*; y en *CEC*, *BEB*; y así indefinidamente, puesto que las magnitudes son infinitamente divisibles. Todos estos triángulos —que son infinitos— cubren una superficie

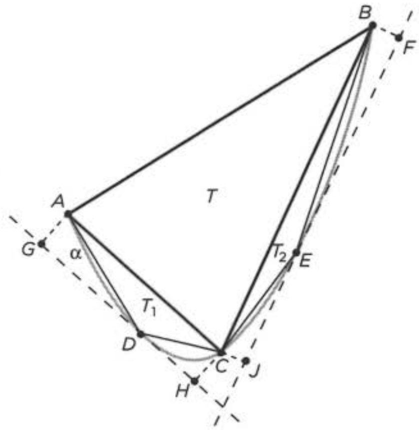
quedará una magnitud menor que la menor de las dos magnitudes dadas.

Esta proposición es equivalente a la definición 4 del Libro V: si una vale, la otra también, y recíprocamente. Arquímedes se percató de este hecho y decidió darle rango de postulado. Hoy se conoce con el nombre de *postulado de Arquímedes*. Brevemente dice:

> **Principio de arquimedianidad.** *Dadas dos magnitudes de la misma especie A, B, siempre existe un número natural n tal que* $n \times A > B$ *o* $n \times B > A$.

Con la demostración de la proposición 7 del Libro XII, Euclides cerró un problema que tiene su origen en la matemática egip-

que es igual a una tercera parte del triángulo $T = \triangle ACB$. Sin embargo, recurrir al infinito no es una opción, momento en que el método de exhaución acude al rescate. Hay que ver que los triángulos $T_1 = \triangle ADC$, $T_2 = \triangle BEC$ «cubren, respectivamente, más de la mitad del segmento parabólico *ADCA*, *BECB*». Y ello se ve por tángram. Está claro que el triángulo $T_1 = \triangle ADC$ vale exactamente la mitad del rectángulo ▭*AH*. Sin embargo, el segmento parabólico *ADCEBA* es menor que el rectángulo ▭*AH*. Por consiguiente, $T_1 = \triangle ADC$, cubre más de la mitad del segmento parabólico *ADCEBA*. Análogamente, con $T_2 = \triangle BEC$, el segmento parabólico *CEBC* y el rectángulo ▭*CF*. Este razonamiento es válido, de forma iterada, para cada segmento de parábola restante. Es importante observar que el razonamiento anterior —explicitado en el caso de un segmento de parábola— vale para otras curvas en general y, en particular, para el círculo.



cia: el volumen de la pirámide. La pregunta de si puede resolverse por medio del método del tángram finito ocupó la tercera posición en la lista de los 23 problemas que David Hilbert seleccionó a principios del siglo pasado como aquellos de especial interés para el desarrollo de la disciplina (la respuesta, por cierto, es «no»). La proposición 2, por su parte, encierra la respuesta de uno de los problemas más destacados de la geometría clásica, y a él le dedicamos el capítulo siguiente.

CAPÍTULO 6

La cuadratura del círculo

Uno de los mayores logros de la escuela pitagórica fue ver que toda figura multilátera lineal era cuadrable. Pero, ¿lo era el círculo y, en general, las figuras con alguno o todos sus lados curvos? Esta cuestión fascinó no solo a matemáticos sino a pensadores de toda condición, y con el tiempo, la expresión «cuadrar el círculo» pasó a referir a una empresa imposible.

El método del tángram permite cuadrar cualquier figura multilátera recta. El afán generalizador de los griegos les condujo a preguntarse de forma natural la cuestión de si las figuras con lados curvos eran cuadrables y, en particular, si lo era la más perfecta de todas ellas, el círculo. El primero en enhebrar la aguja fue el genial Hipócrates de Quíos.

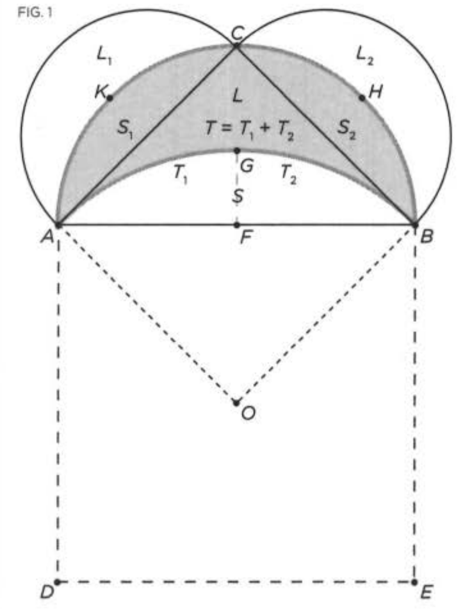
Hipócrates halló tres *lúnulas cuadrables*, siendo la lúnula una figura cerrada por arcos de circunferencias. Halló una sobre media circunferencia, otra sobre menos de media circunferencia, y otra sobre más de media circunferencia. La demostración de Hipócrates —basada en el método del tángram— precisa de dos resultados:

— El teorema de Pitágoras.

— La razón entre el área de dos círculos es la misma que entre los cuadrados de sus diámetros.

No es probable que Hipócrates dispusiera de demostraciones generales de estos resultados; más bien, debía tener una intuición clara de ellos y de su validez. A continuación vamos a analizar en detalle la demostración de la cuadratura de la lúnula sobre media circunferencia.

FIG. 1



Sobre un lado AB de un cuadrado $\square ADEB$ consideramos el arco $\widehat{AGB}$ de la circunferencia que lo circunscribe y una semicircunferencia $\widehat{ACB}$. Se obtiene la lúnula $\widehat{AGBCA}$, marcada en gris en la figura 1. Se puede demostrar que la superficie de esta lúnula es igual a la superficie del triángulo isósceles $\triangle ACB$.

La lúnula se compone del triángulo $\triangle ACB$ en cuestión menos el segmento S más los dos segmentos iguales S_1 y S_2; o sea:

$$\text{área}\,(\widehat{AGBCA}) = \text{área}\,(\triangle ACB) - S + (S_1 + S_2).$$

Elegante método de tángram; todo se reduce, pues, a ver que $S = S_1 + S_2$. Por el teorema de Pitágoras sabemos que:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2. \qquad (*)$$

Basta, pues, ligar las superfices S con dichos cuadrados. Ya se ha dicho que Hipócrates suponía que los círculos son como los cuadrados de sus diámetros, es decir, que se cumple la relación:

$$\frac{S}{AB^2} = \frac{S_1}{AC^2} = \frac{S_2}{CB^2}.$$

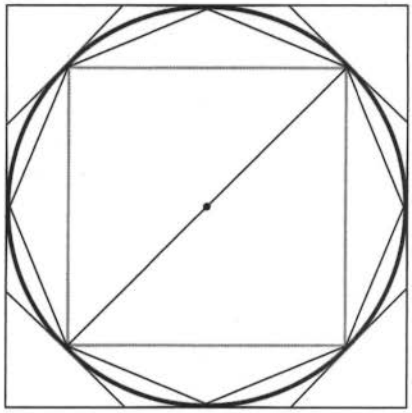
Luego,

$$\frac{S}{AB^2} = \frac{S_1 + S_2}{AC^2 + CB^2}$$

(por Libro V, proposición 12). En virtud de (*), resulta que $S = S_1 + S_2$. ¡Realmente elegante! Se abría así la puerta a que el círculo pudiese ser cuadrable.

EL PASO AL INFINITO

FIG. 2



Los sofistas griegos Antifón (480-411 a.C.) y Brisón (ca. siglo v a.C.) abordaron la cuestión de la cuadratura del círculo y llegaron a una conclusión que es, en apariencia, simple e irrefutable. Para el primero, el círculo se puede aproximar por dentro por medio de polígonos regulares inscritos obtenidos de forma iterada mediante la división de cada arco por la mitad a partir del cuadrado; es decir, por medio del cuadrado, el octógono, el hexadecágono, etc.

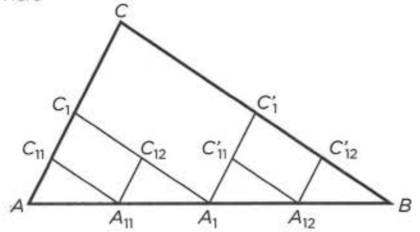
Para Brisón, el círculo se puede aproximar por dentro y por fuera por un método análogo. Se obtiene así una sucesión de figuras planas rectilíneas que encierran el círculo (figura 2). Todos los polígonos mencionados son cuadrables, luego el círculo también debe serlo. Inscribiendo y circunscribiendo un cuadrado, un octógono, un hexadecágono, etc., se obtiene la siguiente sucesión de figuras planas rectilíneas que encierran el círculo, todas ellas cuadrables:

$$p_4 < p_8 < p_{16} < \cdots < p_{2^n} < \cdots < S <$$
$$< \cdots < P_{2^n} < \cdots < P_{16} < P_8 < P_4.$$

Pero ¡cuidado! ¿Qué nos garantiza que la propiedad «ser cuadrable» se conserva cuando se lleva a cabo este «paso al infinito»? Recordemos que Aristóteles lo prohibió precisamente para que tales razonamientos no fueran posibles. Consideremos la proposición siguiente, evidentemente falsa:

Los dos lados de un triángulo son, en longitud, igual al tercer lado (figura 3, en la página siguiente).

FIG. 3



Se constata que las sucesivas líneas quebradas que van de A hasta B tienen la misma longitud que los lados AC y CB: $AC+CB=$ $=AC_1+C_1A_1+A_1C'_1+C'_1B$.

Si «llevamos al límite» el proceso, la línea quebrada se «convertirá» en el lado AB, lo que parece probar la proposición —falsa— inicial. Asumir que una verdad «antes del límite» es cierta una vez que la «llevamos a él» puede ser falaz.

LA SUPERFICIE DEL CÍRCULO EN LOS «ELEMENTOS»

Euclides abre el Libro XII con dos proposiciones que establecen el mismo teorema para polígonos regulares inscritos en un círculo y para el círculo.

> **Libro XII, proposición 1.** *Los polígonos regulares semejantes inscritos en dos circunferencias son como los cuadrados de los diámetros respectivos.*

> **Libro XII, proposición 2.** *Dos círculos son como los cuadrados de los diámetros respectivos.*

La primera es una consecuencia inmediata del teorema de Tales para superficies ya que solo hay que notar que cada uno de los triángulos centrales respectivos en los que descomponen los polígonos regulares cumple el teorema de Tales. La segunda lo podría establecer directamente «por paso al límite», pero este tipo de razonamientos, por implicar el infinito en acto, no son aceptables para la mentalidad griega (aunque en este caso sería correcto hacerlo).

Euclides podría haber «llevado al límite» la proposición 2 del Libro XII mediante el siguiente razonamiento:

Si, para cada polígono n de la forma $n=2^k$, se tiene que

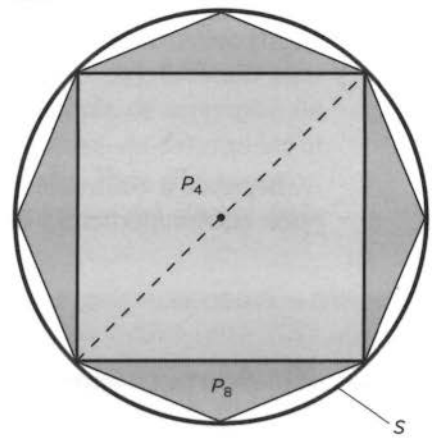
$$\frac{P_n^1}{d_1^2}=\frac{P_n^2}{d_2^2}$$

y, en el límite P_n^1 es S_1 y P_n^2 es S_2 y suponemos que la propiedad anterior se conserva cuando se pasa al límite —es decir, de los polígonos regulares al círculo—, entonces resulta

$$\frac{S_1}{d_1^2}=\frac{S_2}{d_2^2},$$

como queríamos.

FIG. 4



Los polígonos regulares inscritos de 4, 8, 16... lados «llenan» más y más la superficie del círculo.

Descartado el paso al límite, hay que proceder por exhaución. Es decir, hay que ver que el cuadrado inscrito en un círculo cubre más de la mitad de su superficie; si ahora añadimos los triángulos que faltan para pasar del cuadrado al octógono, entonces nos llevamos más de la mitad de lo que queda una vez hemos quitado el triángulo, y así sucesivamente. Llegará un momento en que el círculo polígono regular inscrito P_{2^k} llenará S de tal manera que lo que queda, si lo quitamos, será menor que una superficie cualquiera dada de antemano (figura 4).

Fijémonos que, de forma análoga a lo expuesto en el capítulo anterior en relación con el segmento de parábola, el triángulo isósceles que añadimos a cada lado del cuadrado para obtener un octógono regular «cubría» más de la mitad del segmento circular —una cuarta parte de lo que queda del círculo cuando quitamos el cuadrado inscrito—; seguidamente aplicamos el mismo razonamiento a los triángulos isósceles que hay que añadir a cada lado del octógono regular para obtener el hexadecágono regular y así sucesivamente. Cada vez se cubre «más de mitad», que es lo que se precisa para poder aplicar la exhaución.

Valiéndose de esta herramienta, Euclides hizo dos supuestos: o bien la razón entre superficies es mayor que la del cuadrado

de sus diámetros, o bien es menor (ejemplificados ambos casos en las siguientes fórmulas):

$$(1)\ \frac{S_1}{S_2} < \frac{d_1^2}{d_2^2}, \text{ o } (2)\ \frac{S_1}{S_2} > \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

...llegando a contradicción en ambos casos. Por lo tanto, la relación entre superficies y cuadrados de los diámetros es de igualdad.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 2 DEL LIBRO XII

En el caso

$$\frac{S_1}{S_2} < \frac{d_1^2}{d_2^2} \qquad (1)$$

suponemos que existe una superficie $S < S_2$ tal que

$$\frac{S_1}{S} = \frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

Seguidamente consideramos la superficie $E = S_2 - S$. El método de exhaución garantiza la existencia de un cierto polígono P_{2^k} inscrito en S_2 que lo llena de manera que $S_2 - P_{2^k} < E = S_2 - S$. Ello conlleva a la desigualdad $S < P_{2^k}$. Ahora consideramos el polígono p_{2^k} inscrito en el círculo S_1 (es decir, $p_{2^k} < S_1$) semejante a P_{2^k}. Por Libro XII, proposición 1, sabemos que

$$\frac{P_n^1}{P_n^2} = \frac{d_1^2}{d_2^2},$$

con $n = 2^k$. Por la noción común 1, tenemos que

$$\frac{P_n^1}{P_n^2} = \frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{S_1}{S},$$

con $S < P_{2^k}$ y $p_{2^k} < S_1$, lo cual contradice la definición de igualdad de razones (Libro V, definición 5). Por consiguiente, (1) es falso.

El caso

$$\frac{S_1}{S_2} > \frac{d_1^2}{d_2^2} \qquad (2)$$

lo trató de forma análoga y concluye que también es falso. Luego necesariamente

$$\frac{S_1}{d_1^2} = \frac{S_2}{d_2^2}.$$

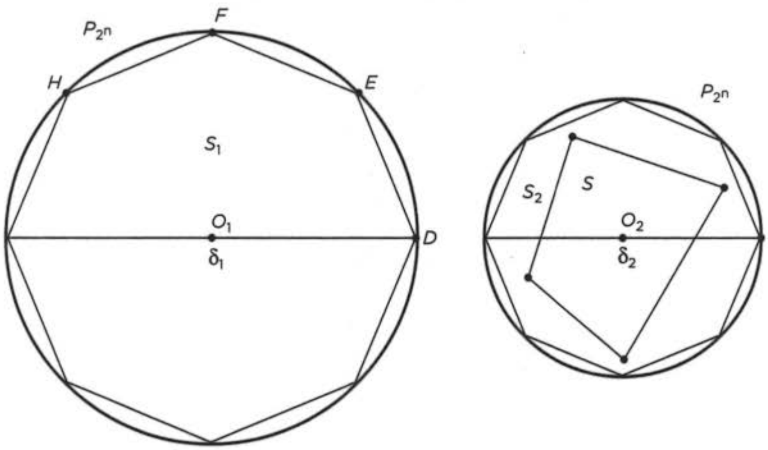
LA DETERMINACIÓN DE π

En un papiro egipcio conocido como Rhind (por el británico Henry Rhind, quien lo compró a mediados del siglo XIX), fechado alrededor de 1650 a.C., y que es a su vez una copia de un papiro de 1800 a.C., se plantean problemas que consisten en determinar el volumen de silos cilíndricos para poner grano. Para ello, su autor, el escriba Ahmés, necesitaba saber la superficie del círculo de la

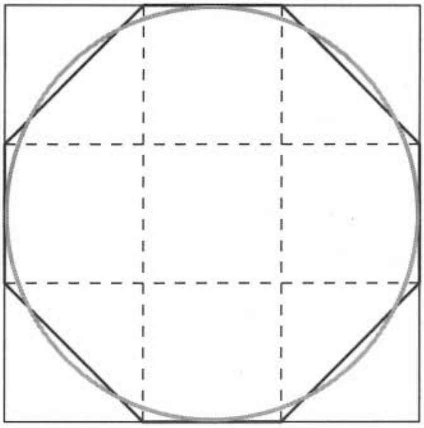
Esta demostración suscita dos interrogantes. ¿Cómo supo Euclides lo que tenía que demostrar? Es decir, ¿por qué se planteó la relación concreta entre superficies y diámetros? ¿Usó informalmente el paso al límite que se ha explicado anteriormente? No se sabe. Por otro lado, para probar (1) Euclides supuso que existe una superficie $S<S_2$ con la cual

$$\frac{S_1}{S}=\frac{d_1^2}{d_2^2};$$

es decir, dadas las superficies S_1, d_1^2, d_2^2, supuso que «existe una superficie S que es la cuarta proporcional». Pero él solamente demostró la existencia de la cuarta proporcional de tres rectas, pero no de tres superficies.



base del cilindro, lo cual le llevó a tener que determinar el valor de lo que hoy llamamos el *número* π. En la Antigüedad, lo normal era considerar que dicho valor era tres. Sin embargo, Ahmés ofreció un valor «mejor» para π que consiguió aproximando la circunferencia con un octógono (véase la figura), de la forma siguiente:



Sea un cuadrado de 9 unidades de lado. Dividámoslo en nueve cuadrados de 3 unidades de lado cada uno. Quitemos los cuatro triángulos rectángulos de los vértices que se obtienen al trazar la diagonal. La superficie del octógono que resulta vale

$$9^2 - 4 \times \frac{3 \times 3}{2} = 81 - 18 = 63$$

unidades cuadradas. Hagamos la superficie del círculo de diámetro 9 unidades igual a 64 unidades cuadradas [que es un número cuadrado]. El valor de π que se obtiene con esta aproximación es

$$\pi = \frac{64}{\left(\frac{9}{2}\right)^2} = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}16\ldots$$

Este valor de π, que es válido en general (es decir, para cualquier valor *d* del diámetro), se obtiene comparando las superficies de dos figuras planas: el círculo y un cierto octógono.

Más de mil años después, Arquímedes, el sabio de Siracusa, en su brevísima obra *De la medida del círculo*, aportó dos resultados nuevos:

Proposición 1. *La relación L/d que hay entre la longitud L de una circunferencia y su diámetro d se halla entre* 223/71 *y* 22/7.

Proposición 2. *La superficie S de un círculo es igual a la de un triángulo rectángulo T cuyos catetos son el radio r del círculo y la longitud L de la circunferencia.*

En la proposición 2 usó la exhaución de la misma manera que Euclides en la proposición 2 del Libro XII; supuso que:

$$(1)\ S > T,\ \text{y}\ (2)\ S < T.$$

y entonces constató que tanto (1) como (2) llevaban a contradicción. Por lo tanto, necesariamente, $S = T$. Pero, ¿cómo intuyó la existencia de esta relación? Nunca lo sabremos.

En la proposición 1, en cambio, Arquímedes usó las longitudes l_6, l_{12}, l_{24}, l_{48}, l_{96}; L_6, L_{24}, L_{12}, L_{48}, L_{96}, respectivamente, de los polígonos regulares inscritos y circunscritos de 6, 12, 24, 48 y 96 lados. Para determinar tales longitudes dio un algoritmo iterativo que, a partir de la longitud l_n, permitía calcular la longitud l_{2n}, y de la L_n, la de L_{2n}, en donde n toma como primer valor el 6. Finalmente dio las desigualdades $l_{96} < L < L_{96}$ que le llevaron al resultado indicado:

$$\frac{223}{71} < \frac{L}{d} < \frac{22}{7}.$$

Lo más importante de este resultado es que Arquímedes se percató de que la razón que existe entre la superficie S de un círculo y el cuadrado del radio r^2 y la razón entre la longitud L de la circunferencia y su diámetro $d = 2r$ es la misma. En la actualidad el valor numérico de esta razón común lo conocemos con el nombre de *número pi* y lo indicamos como π.

Es decir, con estas expresiones, Arquímedes estableció que

$$\frac{S}{r^2} = \frac{L}{d} = \pi.$$

Hemos comprobado hasta qué punto los resultados obtenidos por Eudoxo en el seno de la Academia, y sistematizados por Euclides, permiten lograr resultados muy valiosos en relación con el círculo y la circunferencia. Cabe notar que Arquímedes recurrió a los perímetros, mientras que en el papiro Rhind y en el texto de Euclides se hacía lo propio con las superficies.

UN SUEÑO IMPOSIBLE

La cuadratura del círculo «a la griega», es decir, con regla y compás, se resistió a los geómetras durante siglos. Ya en 414 a.C., el dramaturgo ateniense Aristófanes hizo que un personaje se jactara de haber cuadrado el círculo para caracterizarlo como un charlatán. Las dificultades no impidieron que muchos destacados matemáticos intentaran triunfar allí donde sus antecesores griegos habían fracasado. Así, Nicolás de Cusa (1401-1464), Oronce Fine (1494-1555) o Gregorius Saint Vincent (1584-1667) publicaron supuestos métodos para cuadrar el círculo que al poco se demostraron falsos. En paralelo, James Gregory (1638-1675) y Johann Bernoulli (1667-1748) desarrollaron diversas técnicas para aproximar la cuadratura del círculo por otras vías. El alemán Johann Lambert (1728-1777) fue el primero en probar que π era un número irracional. En 1880, el también alemán Ferdinand von Lindemann (1852-1939) probó que π era, además, un número trascendental, es decir, que no era la raíz de ningún polinomio con coeficientes racionales. Este resultado implicaba que era imposible cuadrar el círculo solo con regla y compás. Se daba así carpetazo a un problema que venía arrastrándose miles de años y se desvanecían las ilusiones de la legión de «cuadradores del círculo» que a lo largo de las épocas había incluido al filósofo británico Thomas Hobbes e incluso al mismísimo Napoleón.

CAPÍTULO 7

La aritmética en los «Elementos»

Los *Elementos* son básicamente un tratado de geometría. Sin embargo, contienen tres libros de inspiración pitagórica, independientes del resto de la obra. En ellos, Euclides ofrece los resultados básicos de la teoría numérica de la divisibilidad, incluido su célebre algoritmo para hallar el máximo común divisor.

Para entender los resultados básicos de los Libros VII, VIII y IX es preciso estar familiarizados con algunos conceptos básicos. En el segundo capítulo del primer libro Euclides ofrece de una vez todas las definiciones aritméticas que precisa en los libros siguientes; no da, sin embargo, ningún postulado. Las más importantes de entre ellas son las siguientes:

1. *Unidad es aquello en virtud de lo cual cada cosa que existe se llama uno.*

2. *Número es una pluralidad compuesta de unidades.*

3. *Un número es parte de otro cuando el menor divide al mayor.*

4. *Un número es partes —o fracción— de otro cuando no lo mide.*

5. *Un número es múltiplo de otro menor cuando el menor lo mide.*

6. *Número par es el divisible en dos partes iguales.*

7. *Número impar [...] el que difiere una unidad de un número par.*

8. *Número parmente par es el que dividido por uno par da uno par.*

9. *Número imparmente par es el que dividido por uno par da uno impar.*

10. *Número imparmente impar es el que dividido por uno impar da uno impar.*

11. *Número primo es el que solo es divisible por la unidad.*

12. *Números primos entre sí son los que solo tienen como divisor común la unidad.*

13. *Número compuesto es el que es divisible por algún otro número.*

⋮

20. *Se dice que cuatro números son proporcionales cuando el primero es el mismo múltiplo, parte o partes del segundo que el tercero del cuarto.*

23. *Un número perfecto es el que es igual a la suma de sus partes [propias].*

La primera definición es puramente filosófica y niega a la unidad la naturaleza de número —concepto que no se acota con precisión hasta la siguiente definición— aunque, cuando lo creyó conveniente, Euclides la usara como tal.

Asimismo, introdujo una distinción entre «parte» (el 2 es parte del 6 porque lo divide) y «partes» (el 5 es partes del 6 por lo contrario). Existe una gran analogía con las definiciones del Libro V, si bien allí «partes» se transforma en «razón», un concepto mucho más complejo. Sin embargo, la noción de «partes» es la base de muchas de las demostraciones aritméticas del texto de Euclides; de hecho, el Libro VII versa sobre fracciones, y también

recurre a ellas en los Libros VIII y IX. También establece la distinción entre «número par» ($N = n + n = 2n$) y «número impar» ($N = 2n + 1$) y da una forma (imprecisa) de clasificar los números según las formas que, en la actualidad, expresaríamos del modo siguiente: 2^m, $2^m(2n+1)$, $(2m+1)(2n+1)$. Pero los conceptos más importantes del Libro VII son los de número «primo», «compuesto» y el de números «primos entre sí». La definición 20 hoy la escribiríamos formalmente

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

si, y solo si, existe un $\lambda \in \mathbb{Q}$ tal que, si $n = \lambda \times m$, entonces $q = \lambda \times p$.

Euclides acaba con una definición muy discutida —la de «número perfecto»—, que no parece propia de la escuela pitagórica del siglo VI. Incluso hay autores que la atribuyen a Hipócrates de Quíos.

«La matemática es la reina de las ciencias y la aritmética la reina de la matemática.»

— Carl Friedrich Gauss.

EL ALGORITMO DE EUCLIDES

El Libro VII se abre con el famoso *algoritmo de Euclides*; el mismo que se enseña en muchas escuelas. Dice:

> *Dados dos números m y n, existe el «mayor número* p *que es parte de* m *y* n».

La idea es la siguiente: del mayor de ambos, m, por ejemplo, se quita el menor n tantas veces como se pueda; con el resto $r < n$, se forma la pareja n,r; se itera el proceso y se obtiene una sucesión de parejas: m,n; n,r; r,s; s,t; t,u; ... x,y; y,z. Necesariamente llega un momento en que la parte z menor de la pareja mide exac-

tamente la mayor y; es decir, «no hay resto» ulterior. Si realizamos el proceso inverso, se comprueba que z mide exactamente a x.

Al final, z mide a la vez a m y a n, y, por lo tanto, z es un divisor común de m y n. Además, es el mayor divisor posible, puesto que cualquier divisor d, común a m y a n, divide también a z.

Se dice así que z es el «máximo común divisor» de la pareja inicial m y n. El conjunto de divisores comunes v de dos números m y n suele expresarse como $v = \langle m,n \rangle$. Si resulta que es la unidad —esto es, si $1 = \langle m,n \rangle$—, decimos que m y n «son primos entre sí». Este método —o proceso— de sustracción mutua para determinar las relaciones entre números se llama *antiféresis*. Lo hemos visto anteriormente, en forma geométrica, al analizar, por ejemplo, la «inconmensurabilidad» del lado y la diagonal de un cuadrado. Una diferencia muy importante entre ambas aplicaciones es que, en el caso de la aritmética, Euclides supone que el proceso *necesariamente* se detiene. En cambio, en los ejemplos geométricos, sigue de forma interminable.

En el Libro X, Euclides aplica este proceso a las magnitudes en general, sean números o no, y establece la clasificación siguiente: la «antiféresis» llega al final si, y solo si, ambas magnitudes

EL ALGORITMO DE EUCLIDES EN FUNCIONAMIENTO

De la aplicación del algoritmo de Euclides se tiene que:

$$\begin{aligned} m &= q_0 \cdot n + r_1 \qquad & r_1 &< n \\ n &= q_1 \cdot r_1 + r_2 \qquad & r_2 &< r_1 \\ r_1 &= q_2 \cdot r_2 + r_3 \qquad & r_3 &< r_2 \\ & \dots & & \\ r_{k-1} &= q_k \cdot r_k & & \end{aligned}$$

Por un lado, $r_{k-2} = q_{k-1} \cdot r_{k-1} + r_k$ y, por otro, $r_{k-1} = q_k \cdot r_k$. Así, $r_{k-2} = q_{k-1} \cdot (q_k \cdot r_k) + r_k = (q_{k-1} \cdot q_k + 1) \cdot r_k$ donde $q_{k-1} \cdot q_k + 1$ es un número natural. Luego r_k mide exactamente a r_{k-2}. Por medio de un razonamiento análogo al anterior, pero hacia delante, se comprueba que si d divide a m y a n, puesto que, por construcción $m = q_0 \cdot n + r_1$, entonces $r_1 = m - q_0 \cdot n$, con $m = m_1 \cdot d$, $n = n_1 \cdot d$. Luego $r_1 = m_1 \cdot d - (q_0 \cdot n_1) \cdot d = (m_1 - (q_0 \cdot n_1)) \cdot d$. Así, d divide a r_1, como queríamos demostrar.

son conmensurables y, por consiguiente, se remiten a números. En otras palabras, si son inconmensurables, la «antiféresis» no tiene fin: es infinita. Son las proposiciones 2 y 3 del Libro X. A pesar de estas asunciones, Euclides no extrajo de este método la potencialidad que sí encontraron los matemáticos indios y chinos.

EL NÚCLEO ARITMÉTICO DE LOS «ELEMENTOS»

En el ámbito de la aritmética, el texto euclídeo contiene los siguientes resultados importantes:

Libro VII, proposición 17. *Si dos números multiplicados alternativamente dan ciertos números estos coinciden.* [Propiedad conmutativa del producto.]

Libro VII, proposición 18. *Si cuatro números son proporcionales*

$\left(\frac{m}{n}=\frac{p}{q}\right)$, *lo son alternados* (esto es, $\frac{m}{p}=\frac{n}{q}$).

Libro VII, proposición 19. *Si* $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$ *si, y solo si,* $m\times q=n\times p$.

Libro VII, proposición 20. *De entre todos los números que tienen la misma razón los menores son primos entre sí.*

Libro VII, proposición 24. *Si* $\langle p,m\rangle=1$ $\langle p,n\rangle=1$, *entonces* $\langle p,m\times n\rangle=1$.

Libro VII, proposición 29. *Si* p *es primo y* p *no es parte de* n, *entonces* $\langle p,n\rangle=1$.

Libro VII, proposición 30. *Si* p *es primo y divide a (es parte de)* $m\times n$, *entonces* p *es parte de uno de ambos factores* m,n. (Lema de Euclides-Gauss.)

Libro VII, proposición 31. *Todo número compuesto es medido por un número primo.*

Libro VII, proposición 32. *Todo número o es primo o es medido por un número primo.*

Libro IX, proposición 14. *El menor número que está medido por varios números primos no tiene más divisores primos que estos.*

Libro IX, proposición 20. *Hay más números primos que cualquier cantidad finita de números primos.*

En la demostración de la proposición 31 del Libro VII, Euclides hace uso de un «postulado» no explícito. El sabio de Alejandría razona del modo siguiente: Sea N un número compuesto, tendrá un divisor —una parte— $N' < N$. Supongamos que no es primo. Entonces es a su vez compuesto y admite un divisor —una parte— $N'' < N' < N$; y sigamos... No es posible que no se halle nunca un número primo P pues tendríamos la sucesión decreciente infinita $\ldots < N^{n)} < \ldots < N'' < N' < N$. Y esto, dice Euclides, «es imposible». Así pues, Euclides impone la imposibilidad de sucesiones decrecientes ilimitadas de números naturales.

«Dios creó los números los números enteros; el resto es cosa del hombre.»

— Leopold Kronecker (1823-1891).

A esta propiedad Pierre de Fermat la llamaría *del descenso infinito*, e hizo uso de ella a la hora de alcanzar resultados importantísimos que se erigirían en un auténtico renacimiento de la aritmética.

La proposición 14 del Libro IX es motivo de discusión acerca de si se trata del *teorema fundamental de la aritmética* (todo número entero mayor que 1 o es primo o puede ser expresado en forma de producto de números primos, y dicha forma es única), expresado con las limitaciones del lenguaje matemático de la

época. Para dilucidar la cuestión habría que saber si los primos que miden al número son «distintos» o pueden ser «iguales»; en este segundo caso, se trataría, en efecto, del enunciado del teorema.

LA INFINITUD DE LOS NÚMEROS PRIMOS

En capítulos anteriores se han tratado las limitaciones que Aristóteles imponía al uso del infinito. En la proposición 20 del Libro IX *(Hay más números primos que cualquier cantidad finita de ellos)*, Euclides respeta esa limitación y tiene mucho cuidado de no hablar de «infinitos números primos» (véase la página 83).

Sin embargo, ¿existe un algoritmo para ir obteniendo más y más números primos? Euclides no se pronunció al respecto. Hay que esperar la *Aritmética* de Nicómaco de Gerasa (ca. 60-ca. 120) para tener conocimiento de la *criba de Eratóstenes*, el método empleado por el matemático del mismo nombre:

> El método para obtenerlos lo bautizó Eratóstenes con el nombre de *criba*, porque si tomamos todos los números impares, el método lo podemos pensar como un instrumento selectivo —como la criba— porque permite separar los números primos de los compuestos. La criba procede así. Empiezo por el tres y miro cuáles son medidos por el tres —pasando por encima dos de cada tres— y separando el tercero. Luego pasamos al primero no cribado, el cinco, y pasamos cuatro y el quinto lo hacemos caer; luego, lo hacemos con el siete, y así sucesivamente, empezando con el primero que queda.

En este texto se exponen claramente dos hechos. Partimos de la sucesión de los números impares:

3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69
71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101	103

LOS NÚMEROS PERFECTOS

Si bien Euclides ofreció la definición correcta y un teorema que sirve para generar los números perfectos, no dio ningún ejemplo de ellos. El enunciado de la proposición correspondiente puede parecer poco claro, seguramente porque está dado de forma descriptiva:

> **Libro IX, proposición 36.** *Si varios números, empezando por la unidad, están en proporción duplicada y el conjunto de todos es un número primo, el producto de este conjunto por el último es un número perfecto.*

Expresados los números, dice lo siguiente:

> Si $1, 2, 2^2, 2^3,..., 2^n$ es una sucesión en «proporción duplicada», sumamos y obtenemos $S_n=1+2+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1$; si S_n es un número primo, entonces $P_n=2^n\times S_n=2^n\times(2^{n+1}-1)$ es un número perfecto (par).

Euclides pudo resolver este resultado porque en la proposición 35 del Libro IX dio la fórmula que servía para sumar los términos de la sucesión $1, 2, 2^2, 2^3,..., 2^n$. Observó además que los únicos divisores propios —los únicos que considera Euclides entre los cuales considera la unidad— de P_n son $1, 2, 2^2, 2^3,..., 2^n$ y $S_n, 2\times S_n, 2^2\times S_n, 2^3\times S_n,..., 2^{n-1}\times S_n$. Sumó y obtuvo el resultado del teorema: la suma de los divisores $1, 2, 2^2, 2^3,..., 2^n$ es $S_n=2^{n+1}-1$ y la suma de los divisores $S_n, 2\times S_n, 2^2\times S_n, 2^3\times S_n,..., 2^{n-1}\times S_n$ es $(2^n-1)\times S_n$. La suma de ambos resultados es $P_n= =S_n+(2^n-1)\times S_n=2^n\times S_n=2^n\times(2^{n+1}-1)$. QED.

Los primeros ejemplos

En su *Aritmética*, Nicómaco de Gerasa (ca. 60-ca. 120) establece que los números perfectos son 6, 28, 496 y 8126. De ahí sacó algunas conclusiones:

1. Los números perfectos (pares) acaban en 6 y en 8 (cierto).
2. Se alternan (falso).
3. Hay uno para cada orden decimal —de las unidades, decenas, centenas, millares, unidades de mil, etc.— (falso).

Ya en el siglo XVIII, Euler probó el recíproco del teorema de Euclides: *Todo número perfecto [par] es de la forma anterior*: $2^n\times(2^{n+1}-1)$, con $2^{n+1}-1$ primo. En la actualidad todavía hay cuestiones abiertas relativas a los números perfectos: no se sabe si hay una infinidad de números perfectos pares ni tampoco si hay números perfectos impares.

A partir del 3, consideremos los números de tres en tres, y obtenemos:

3	5	7		11	13		17	19		23	25		29	31		35
37		41	43		47	49		53	55		59	61		65	67	
71	73		77	79		83	85		89	91		95	97		101	103

A partir del 5, consideremos los números de cinco en cinco, y obtenemos:

3	5	7		11	13		17	19		23			29	31		
37		41	43		47	49		53			59	61			67	
71	73		77	79		83			89	91			97		101	103

Y así sucesivamente. Por ejemplo, la lista de los números primos inferiores a mil es la siguiente:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181	191	193	197
199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359	367	373	379
383	389	397	401	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541	547	557	563	569	571
577	587	593	599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743	751	757	761
769	773	787	797	809	811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977
983	991	997												

LAS TERNAS PITAGÓRICAS ARITMÉTICAS

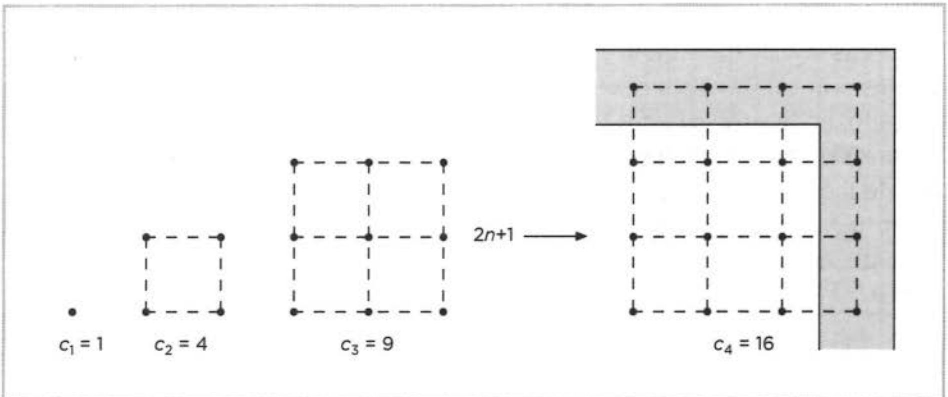
Un último problema digno de mención es el del algoritmo para obtener ternas pitagóricas aritméticas; son tres números naturales que cumplan el teorema de Pitágoras como, por ejemplo, 3, 4, 5; 5, 12, 13; etc. Es decir, tres números naturales a, b, c tales que $a^2+b^2=c^2$.

Se cree que los babilonios conocían algún método para determinar las ternas pitagóricas, como muestra la tablilla mesopotámica conocida por el número de catálogo Plimpton 322, que contiene «ciertas» ternas pitagóricas aritméticas expresadas en sexagesimal. Por otro lado, se atribuye a Pitágoras un método para obtener ternas pitagóricas basado en el gnomon de los números cuadrados. Un número es un *número cuadrado* cuando se puede disponer en forma de cuadrado (véase la figura). Tenemos pues $n^2+(2n+1)=(n+1)^2$. Para que sea una terna pitagórica —en la cual un cateto y la hipotenusa son dos números sucesivos— el gnomon debe ser también un cuadrado; es decir, $2n+1=k^2$, para un cierto número k impar. Luego:

$$n=\frac{k^2-1}{2},\ k \text{ impar.}$$

Así se obtienen las ternas, que son: $n=\frac{k^2-1}{2}$, k, $n+1=\frac{k^2+1}{2}$, con k impar, que generan la tabla siguiente:

Los números cuadrados sucesivos 1, 4, 9, 16,..., $(n-1)^2$, n^2. Para pasar de $c_n=n^2$ a $c_{n+1}=(n+1)^2$ hay que añadir el gnomon que vale precisamente $2n+1$. Se pasa, pues, de uno al siguiente por medio de los números impares.



$a := k$ impar	3	5	7	9	11	13	15	...
$b := n = \frac{k^2-1}{2}$	4	12	24	40	60	84	112	...
$c := n+1 = \frac{k^2+1}{2}$	5	13	25	41	61	85	113	...

De esta manera se obtienen una «infinidad» de ternas pitagóricas, pero no todas; falta, por ejemplo, la terna 8, 15, 17, en la que el cateto y la hipotenusa difiere de dos unidades.

Se atribuye a Platón la generalización del método pitagórico para obtener tales ternas. Hay que pasar de $(n-1)^2$ a $(n+1)^2$. Ello se obtiene sumando dos gnomon: $2n-1$, que permite pasar de $(n-1)^2$ a n^2; y $2n+1$, que permite pasar de n^2 a $(n+1)^2$. En total, hay que añadir $4n$. Es decir, $(n-1)^2+4n=(n+1)^2$. Basta pues que n sea un cuadrado: $n=k^2$. Así se obtienen las ternas k^2-1, $2k$ y k^2+1. Para $k=4$, obtenemos la terna 8, 15, 17 antes citada. De hecho, se obtiene la siguiente tabla:

k	2	3	4	5	6	7	8	
$a := k^2-1$	3	8	15	24	35	48	63	...
$b := 2k$	4	6	8	10	12	14	16	...
$c := k^2+1$	5	10	17	26	37	50	65	...

Existe una diferencia entre ambas tablas: en la primera las ternas son *simples*; es decir, carecen de divisores comunes; en cambio, en la segunda, las columnas que corresponden a valores impares de k se pueden simplificar por dos y entonces se obtienen los de la primera tabla. De alguna manera, la segunda tabla contiene a la primera. Sin embargo, ¿existe un algoritmo que dé «todas» las ternas pitagóricas aritméticas? La respuesta es afirmativa y la da el propio Euclides en el lema 1 del Libro X:

Encontrar dos números cuadrados que juntos formen otro cuadrado.

Sin entrar en detalles se puede decir que Euclides recurre al algoritmo $a = \lambda^2 - \mu^2$, $b = 2\lambda\mu$, $c = \lambda^2 + \mu^2$ donde λ, μ deben ser primos entre sí y de paridad diferente si queremos que no se repita ninguna terna y que sean simples, carentes de factores comunes. De hecho, las ternas simples son las únicas que importan, ya que está claro que, cualquiera que sea el número natural k, $3k$, $4k$, $5k$, también lo es, puesto que 3, 4, 5 lo es, pero carece de interés. Y esto vale, en general, para toda terna pitagórica a, b y c.

CAPÍTULO 8

La transmisión de los «Elementos»

No hay mayor evidencia de la importancia histórica de Euclides y su obra que las numerosísimas copias y ediciones que de ella se han realizado. Ninguna otra obra clásica de entre las dedicadas al conocimiento tiene una historia más variopinta de versiones, ediciones y comentarios.

Los *Elementos* recogen y sintetizan de forma admirable tres siglos de pensamiento matemático griego. El valor de este legado fue reconocido ya en la misma época y, posteriormente, por culturas diversas a lo largo de toda la historia en un proceso que recorre el mundo romano, el árabe, el europeo medieval y llega hasta nuestros días en forma de ediciones críticas más o menos definitivas y en los soportes más variados.

El texto quedó fijado por vez primera en la edición del año 370 debida a Teón de Alejandría; de esta versión parte la que puede considerarse «tradición central» de las ediciones posteriores de la obra.

La otra gran tradición es la árabe. Los matemáticos de la Casa de la Sabiduría de Bagdad de los siglos IX y X —una época y un lugar históricamente inolvidable por lo que a la ciencia en general, y la matemática en particular se refiere; pero también en el marco más general de la cultura mundial— supieron reconocer su valía y gracias a sus estudios, traducciones y comentarios (entre los que destacan los de Al-Nayrīzī y Al-Jayyānī) la obra de Euclides —como la de tantos otros pensadores griegos— retornaría a Occidente a partir del siglo XII. Son de esa época las ediciones latinas de los *Elementos*, en las que jugó un papel importante la famosa escuela de traductores de Toledo y también, en menor medida, la de Ripoll.

MANUSCRITOS Y EDICIONES

El manuscrito más antiguo que se conserva de los *Elementos* de Euclides es del siglo IX (si se omite el fragmento fechado en el período entre los años 75 y 125). Se descubrió en un vertedero de basura de la ciudad griega de Oxyrhynchus, actual el-Bahnasa, a unos 160 kilómetros de El Cairo, durante las exploraciones realizadas por Bernard Payne Grenfell y Arthur Surridge Hunt bajo el palio de la Universidad de Oxford entre 1896 y 1897. En la tabla siguiente se recogen, en síntesis, los manuscritos más notables de los *Elementos*, de algunos de los cuales solo se conserva un ejemplar.

Lugar	Biblioteca	Siglo
Oxford	Bodleian Library	IX
Vaticano	Biblioteca Vaticana	X
Florencia	Biblioteca Laurenziana	X
Bolonia	Biblioteca Comunale	XI
Viena	Nationalbibliothek	XII (?)
París	Bibliothèque Nationale	XII

El manuscrito conservado en Oxford fue un encargo que Aretas de Cesarea (860-935), por aquel entonces arzobispo de dicha ciudad de Capadocia, hizo en 881 a Stephanus, un experto calígrafo bizantino. El manuscrito es de letras anchas con cierta forma cuadrada y una pequeña inclinación a la izquierda. De idéntico tipo es el famoso manuscrito de los *Diálogos* de Platón, encargado asimismo por Aretas y conservado en la misma biblioteca.

De la importancia de la obra en la Europa medieval es testimonio que la primera impresión de la que se tiene noticia se hiciera en fecha tan temprana como 1482; es la debida al editor alemán Erhard Ratdolt, que escogió a tal efecto la edición comentada de Giovanni Campanus de Novara de la traducción latina que realizara el inglés Adelardo de Bath en el siglo XII (probablemente de un original en la tradición árabe).

Versiones destacadas de los *Elementos*				
Año	**Ciudad**	**Autor**	**Idioma**	**Título**
1482	Venecia	Giovanni Campanus de Novara	Latín (del árabe)	*Preclarissimum opus elementorum Euclidis megarensis una cum commentis Campani perspicacissimi in arte geometrica.*
1505	Venecia	Bartolomeo Zamberti	Latín (del griego)	*Euclidis megarensis philosophi platonici mathematicorum disciplinarum Janitores... elementorum libri XIII cum expositione Theonis insignis mathematici.*
1509	Venecia	Campanus, revisado por Luca Pacioli	Latín	
1533	Basilea	Simon Grayneaeus	Griego (edición príncipes)	
1572	Pesaro	Federico Commandino	Latín	*Euclidis elementorum libri XV, una cum scholiis antiquis.*
1574	Roma	Cristophore Clavius	Latín	*Euclidis Elementorum libri XV.*
1654	Amberes	André Tacquet	Latín (Libros I-VI; XI-XII)	*Elementa geometriae planae et solidae.*
1703	Oxford	David Gregory	Griego y latín	
1804 1808	París	François Peyrard	Griego, latín y francés	*Euclides quae supersunt. Les Oeuvres d'Euclide.*
1883 1888	Copenhague	Johan Ludvig Heiberg	Latín	*Euclidis opera Omnia.*

Inspirado por la *Aritmética* de Jordanus Nemorarius (siglo XII), Campanus incluye una axiomática de los libros aritméticos y, en particular, decreta que «no existen cadenas descendientes infinitas de números naturales». La impresión de Ratdolt contiene más de cuatrocientos grabados y constituye una obra maestra por ser una de las primeras impresiones de un texto de naturaleza matemática. A esta impresión le siguió poco después otra procedente de la tradición central, debida a Bartolomeo Zamberti y, en

EUCLIDES, EXPOLIADO

Napoleón Bonaparte gustaba de acaparar toda clase de tesoros y llevarlos a París para enriquecer los museos franceses. Dos ejemplos de ello son la piedra Rosetta y los cuatro caballos de San Marcos de Venecia, que durante unos años remataron el arco de triunfo parisino. Cuando invadió Italia, Napoleón se llevó a París un manuscrito de los *Elementos* depositado en la Biblioteca del Vaticano. Poco después, en 1804, el parisino François Peyrard publicó los *Éléments de géométrie d'Euclide,* una edición del manuscrito anterior. Peyrard se dio cuenta de que el texto no estaba, como la mayoría, basado en Teón de Alejandría, sino en una fuente todavía más antigua, lo que apunta a un mejor ajuste al original de Euclides. El manuscrito regresó nuevamente a la Biblioteca del Vaticano.

1572, la de Federico Commandino, la más rigurosa de las versiones latinas y base de destacadas ediciones posteriores como la de Gregory. En 1533 se había impreso la considerada *editio princeps* (es decir, de referencia) en su versión griega, obra de Simon Grayneaeus. La última edición que recoge la tabla anterior es la *princeps* correspondiente a la versión latina, de Johan Ludvig Heiberg, realizada entre 1883 y 1888, que contiene la totalidad de la obra de Euclides en ocho volúmenes y un suplemento, tanto la propia del autor como la que se le atribuye según se ha tratado en el primer capítulo. A partir de esta edición queda consolidada la obra y las versiones posteriores se dedican como mucho a completarla.

De la decena de ediciones destacadas de los *Elementos* hasta la *princeps* de Heiberg las hay tan curiosas como las del jesuita y director del Colegio Romano, Cristopher Clavius, que a las 468 proposiciones euclídeas añadió 671 de propio cuño. Esta sería la versión que el también jesuita Matteo Ricci se llevó a la China y la que fue traducida a este idioma.

Baste lo expuesto como tributo a la importancia de este sublime texto científico. Con las diferencias lógicas debidas a la distinta naturaleza de los contenidos, solo las obras de Homero, Sófocles, Platón o Aristóteles rayan a una altura parecida de entre las que conforman el legado escrito de la cultura griega.

Epílogo

El siglo XIX termina, por lo que a la geometría se refiere, con el texto paradigmático del genial matemático prusiano David Hilbert, «Fundamentos de la geometría» («Grundlagen der Geometrie»). Con dicha obra se cierra, aun cuando pueda parecer que se consolida, una forma de hacer y entender la matemática. Hilbert «axiomatizó» la geometría euclídea, pero lo hizo sin necesidad de recurrir a la intuición geométrica. Como gustaba de decir al autor:

> Deberíamos ser capaces de leer mesas, sillas y jarras de cerveza en lugar de puntos, líneas rectas y planos.

La diferencia entre ambos textos, el euclídeo y el «hilbertiano», radica en el recurso a la intuición y a la figura que subyace al primero y que el segundo quiere erradicar. Para ello, Hilbert se apoya en un formalismo estricto: los axiomas establecen los ligámenes entre los objetos geométricos (los cuales no requieren de definiciones adicionales a los axiomas mismos) y a partir de ellos y mediante las herramientas que proporciona la lógica formal, se establecen los teoremas. La necesaria consistencia de una teoría desarrollada de esta forma —la imposibilidad de deducir una sentencia y su negación, requisito en el que basa la reducción al absurdo— impone, según Hilbert, la existencia de los objetos geomé-

tricos. El de Hilbert fue un intento por fundamentar la matemática tras el fracaso del enfoque basado en la teoría de tipos de Russell.

Sería esta nueva concepción del pensamiento matemático lo que llevaría al prestigioso matemático francés Jean Dieudonné a exclamar «À bas, Euclide» en un seminario en 1969. No se trataba, en absoluto, de denigrar la figura y la obra del genial matemático alejandrino, sino en criticar su excesiva presencia en la enseñanza de la geometría en las escuelas de la época. Nacía así lo que, a partir de la década de 1970, se conocería como «matemática moderna», una nueva forma de explicar las matemáticas que tuvo un éxito fulgurante. El propio Hilbert había dicho que:

> Mi opinión es esta: a pesar del alto valor pedagógico y heurístico del valor genético, el método axiomático merece [...] la preferencia en la presentación definitiva de nuestro conocimiento y su plena seguridad lógica.

Sin embargo, dos décadas después se reveló como un método «excesivamente moderno». Más de dos mil años después de los *Elementos*, se reabría la discusión del valor pedagógico —con un valor quizá mucho más genético— del enfoque euclídeo.

Lecturas recomendadas

BELL, E.T., *Los grandes matemáticos*, Buenos Aires, Losada, 2010.
BOYER, C., *Historia de la matemática*, Madrid, Alianza Editorial, 2007.
EGGERS LAN, C., *El nacimiento de la matemática en Grecia*, Buenos Aires, Eudeba, 1995.
HILBERT, D., *Fundamentos de geometría*, Madrid, Centro Superior de Investigaciones Científicas, 1953 (reeditado en 2010).
KLINE, M., *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*, Madrid, Siglo XXI, 1985.
KÖRNER, S., *Introducción a la filosofía matemática*, México, Siglo XXI, 1967.
PUERTAS CASTAÑOS, M.L., *Elementos*, tres volúmenes, Madrid, Gredos, 1991, 1994 y 1996.
PLA i CARRERA, J., *La veritat matemàtica*, Barcelona, Reial Acadèmia de Doctors, 2003.
—: Liu Hui. *Nueve capítulos de la matemática china*, Madrid, Nivola, 2009.
STEWART, I., *Historia de las matemáticas*, Madrid, Crítica, 2008.
VERA, F., *Científicos griegos*, 2 volúmenes, Madrid, Aguilar, 1970.

Índice